

Acquisition et traitement de l'image

M. Van Droogenbroeck

Décembre 2001 (version 1.5)

Détails pratiques

- **Examen**
 - travail écrit : à remettre et à présenter
- **Notes de cours**
 - versions PDF et HTML en ligne à l'adresse <http://www.ulg.ac.be/telecom>
- **Transparents**
 - version PDF en ligne à l'adresse <http://www.ulg.ac.be/telecom>
- **CD-ROM**
 - sur demande
 - contenu :
 - notes au format PDF (en couleurs sur fond jaune) et HTML

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire
- Rehaussement et restauration
- Segmentation d'images
- Tomographie par rayons X

Introduction

- Éléments de perception visuelle
 - Les couleurs : représentation, systèmes, luminance, ...
 - Effets visuels
 - Notion de transparence
- Structure d'échantillonnage et trame
- Vidéo
- Structures de données
- Résolution
- Applications industrielles
 - Segmentation
 - Reconnaissance de caractères

Le système visuel humain et la lumière

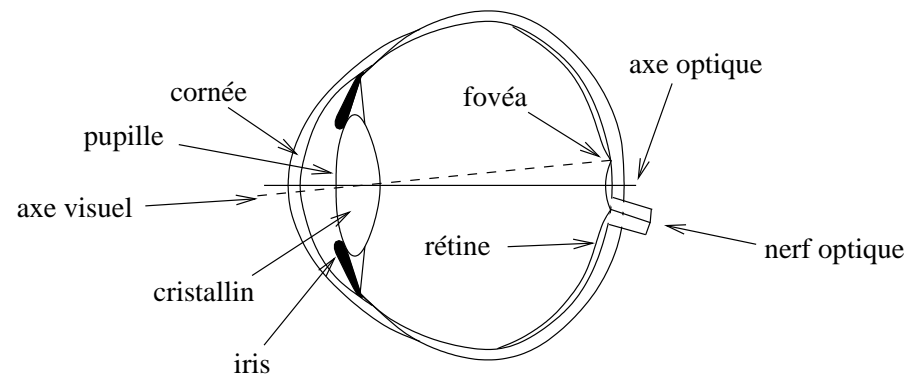


FIG. 1 – Coupe latérale simplifiée de l'œil.

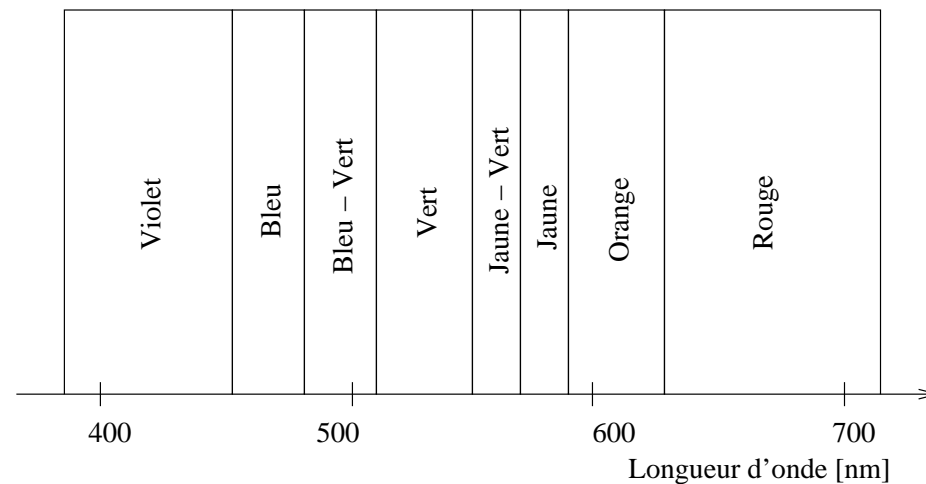


FIG. 2 – Les longueurs d'onde associées aux couleurs.

Représentation fréquentielle des couleurs

$$\int_{\lambda} L(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

Problème car trop grand nombre de capteurs nécessaires à la description de la couleur

Solution : utiliser les espaces de couleurs

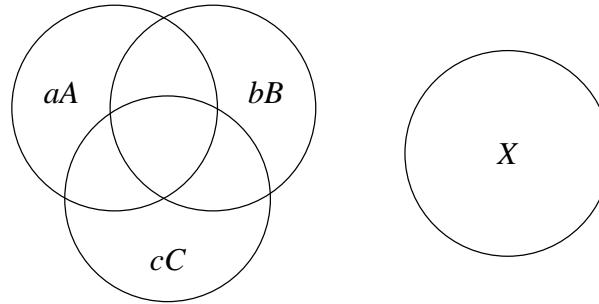


FIG. 3 – Expérience d'égalisation d'une couleur X au moyen de trois couleurs primaires A , B et C .

L'espace de couleurs additif RGB

Trois couleurs monochromatiques : rouge R (700 [nm]), vert V (546,1 [nm]) et bleu B (435,8 [nm]),

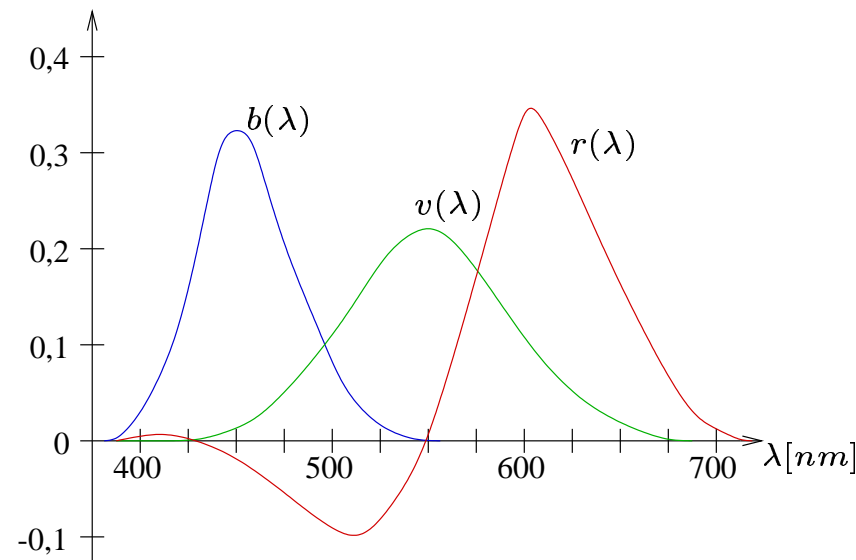
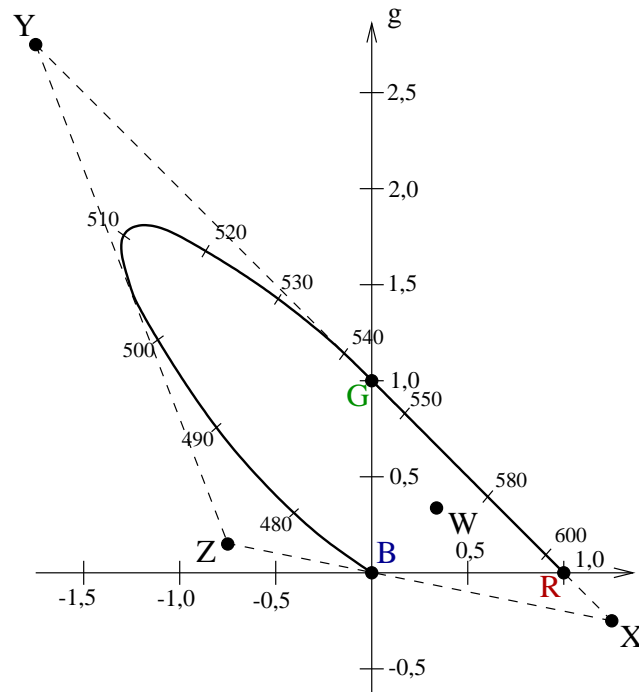


FIG. 4 – Courbes d'égalisation spectrale obtenues par égalisation des couleurs au moyen d'un mélange additif.

Diagramme chromatique RGB de la CIE



Notion d'intensité

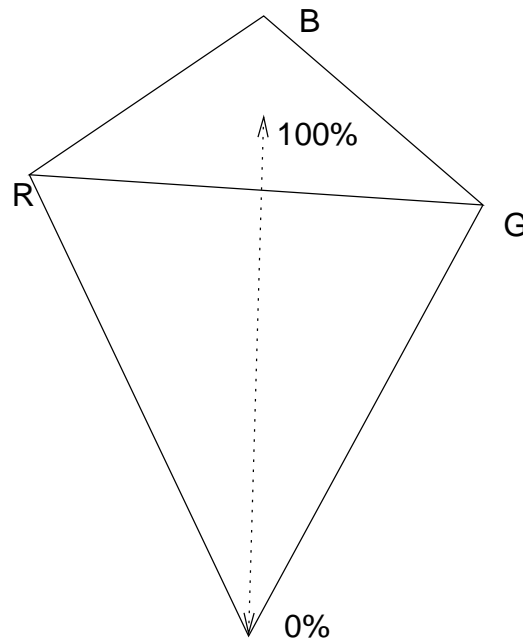


FIG. 5 – Pyramide des couleurs obtenues au moyen du tri-stimulus RGB.

Vers d'autres systèmes de couleurs : le système XYZ

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,769 & 1,7518 & 1,13 \\ 1 & 4,5907 & 0,0601 \\ 0 & 0,0565 & 5,5943 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$x = \frac{X}{X + Y + Z} \quad (3)$$

$$y = \frac{Y}{X + Y + Z} \quad (4)$$

$$z = \frac{Z}{X + Y + Z} \quad (5)$$

$$x + y + z = 1 \quad (6)$$

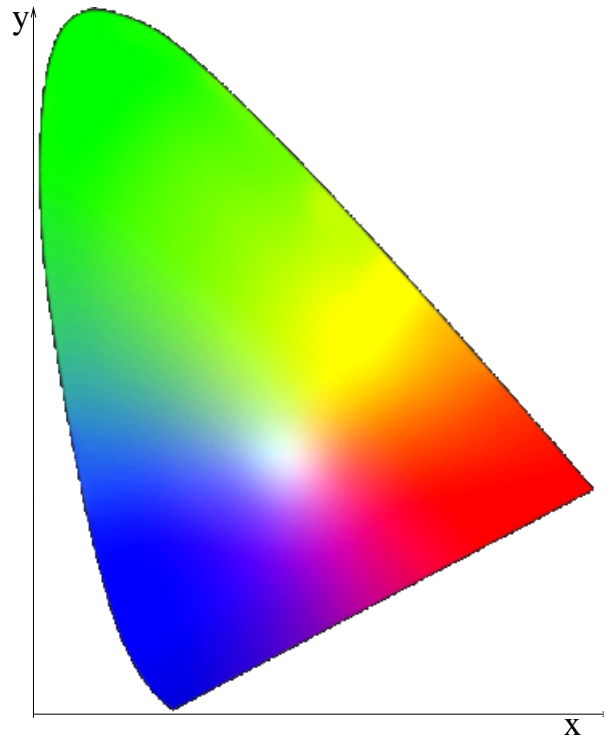


FIG. 6 – Diagramme chromatique (approché !) défini par les deux variables de chrominance x et y .

Représentation sous forme de cube

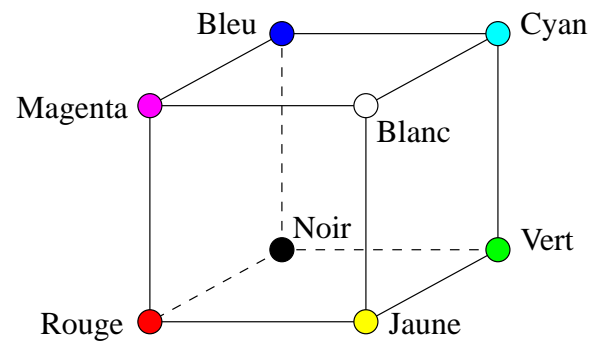


FIG. 7 – Espace tridimensionnel des stimuli produits par les composantes *RGB*.

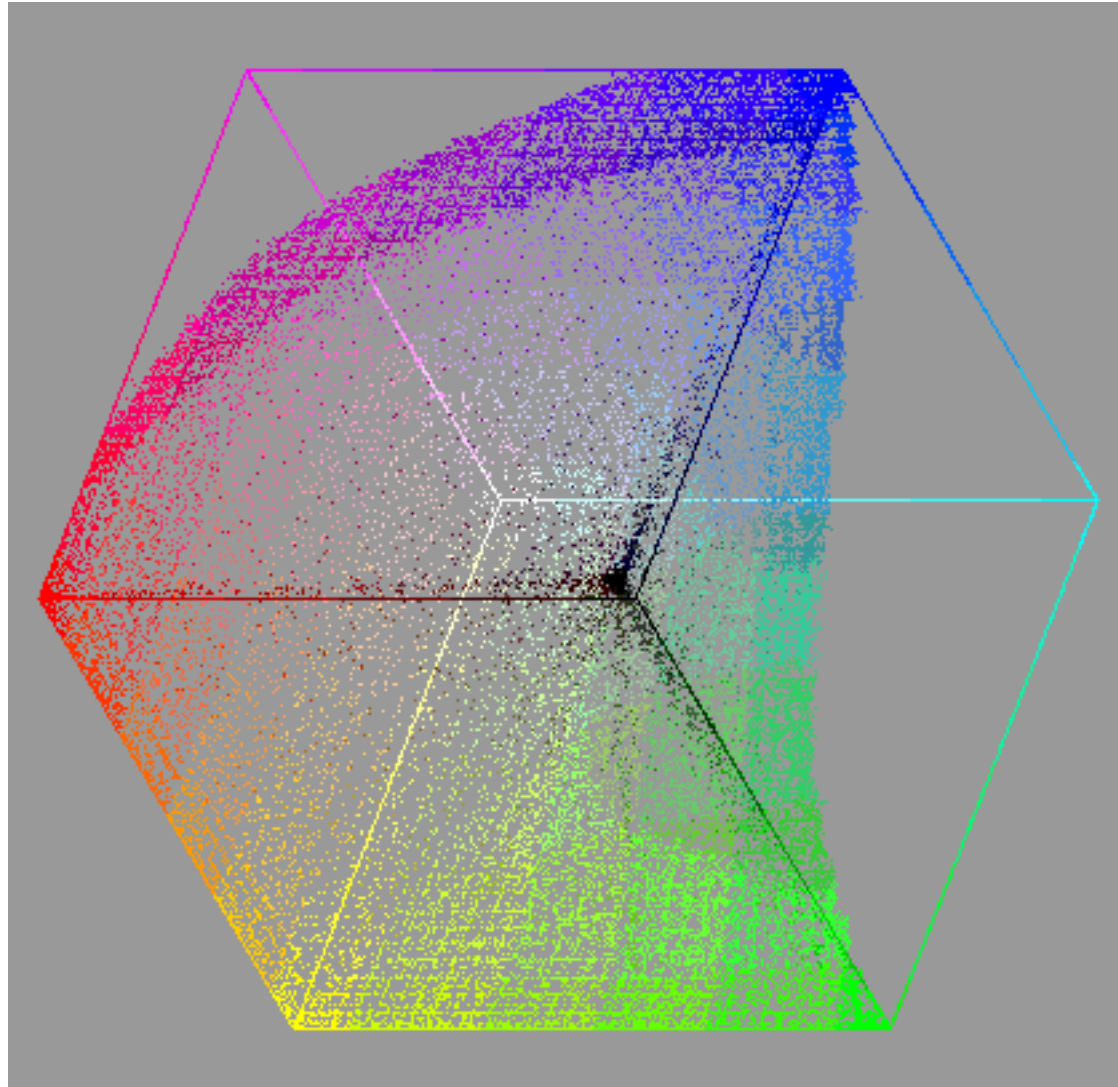


FIG. 8 – Espace tridimensionnel des couleurs du diagramme de chrominance approché.

Luminance

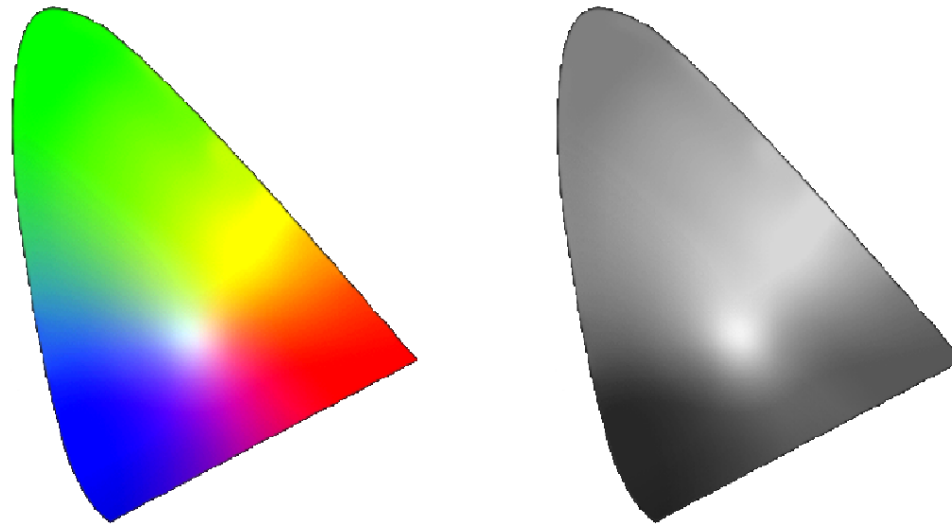


FIG. 9 – Diagramme chromatique xy et luminance maximale en chaque point.

Système de couleur HSI

Variables plus physiques :

- teinte (hue en anglais)
- saturation
- intensité

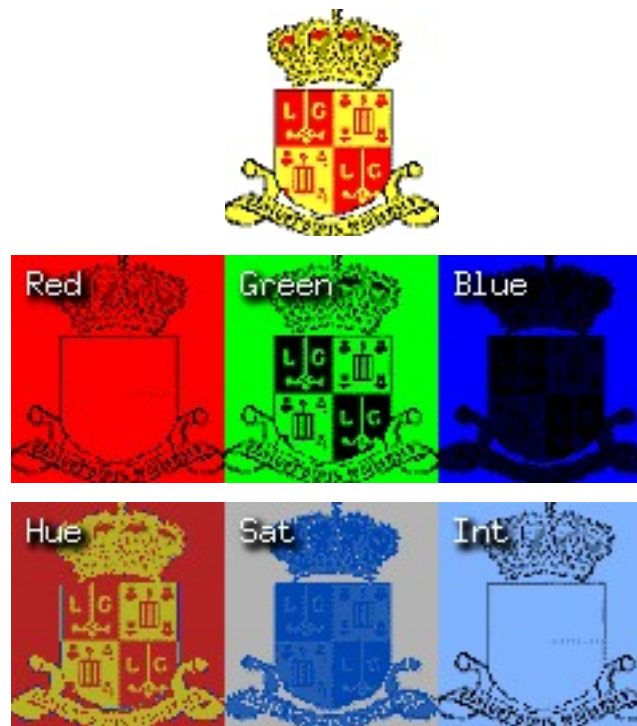










FIG. 10 – Décomposition d'une image en couleurs.

D'autres espaces de couleurs

- le système de couleurs soustractifs : Cyan, Magenta et Yellow (CMY)
- les systèmes YIQ , YUV ou YC_bC_r

En pratique

Hexadécimal				R G B		
00	00	00		0	0	0
00	00	FF		0	0	255
00	FF	00		0	255	0
00	FF	FF		0	255	255
FF	00	00		255	0	0
FF	00	FF		255	0	255
FF	FF	00		255	255	0
FF	FF	FF		255	255	255

TAB. 1 – Table de correspondance de couleurs définies sur 8 bits.

Les fausses couleurs

Utilisation d'une palette de couleurs, appelée *Color Look Up Table* (CLUT ou LUT)

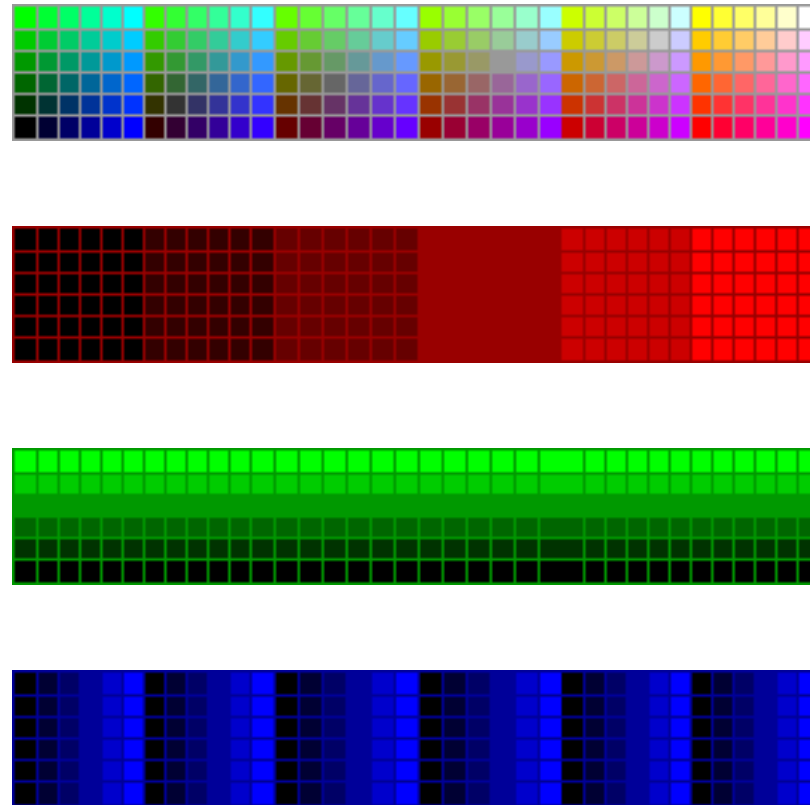


FIG. 11 – Palette de couleurs utilisée par les logiciels de navigation ainsi que la décomposition en R, G et B.

Exemple de représentation en fausses couleurs

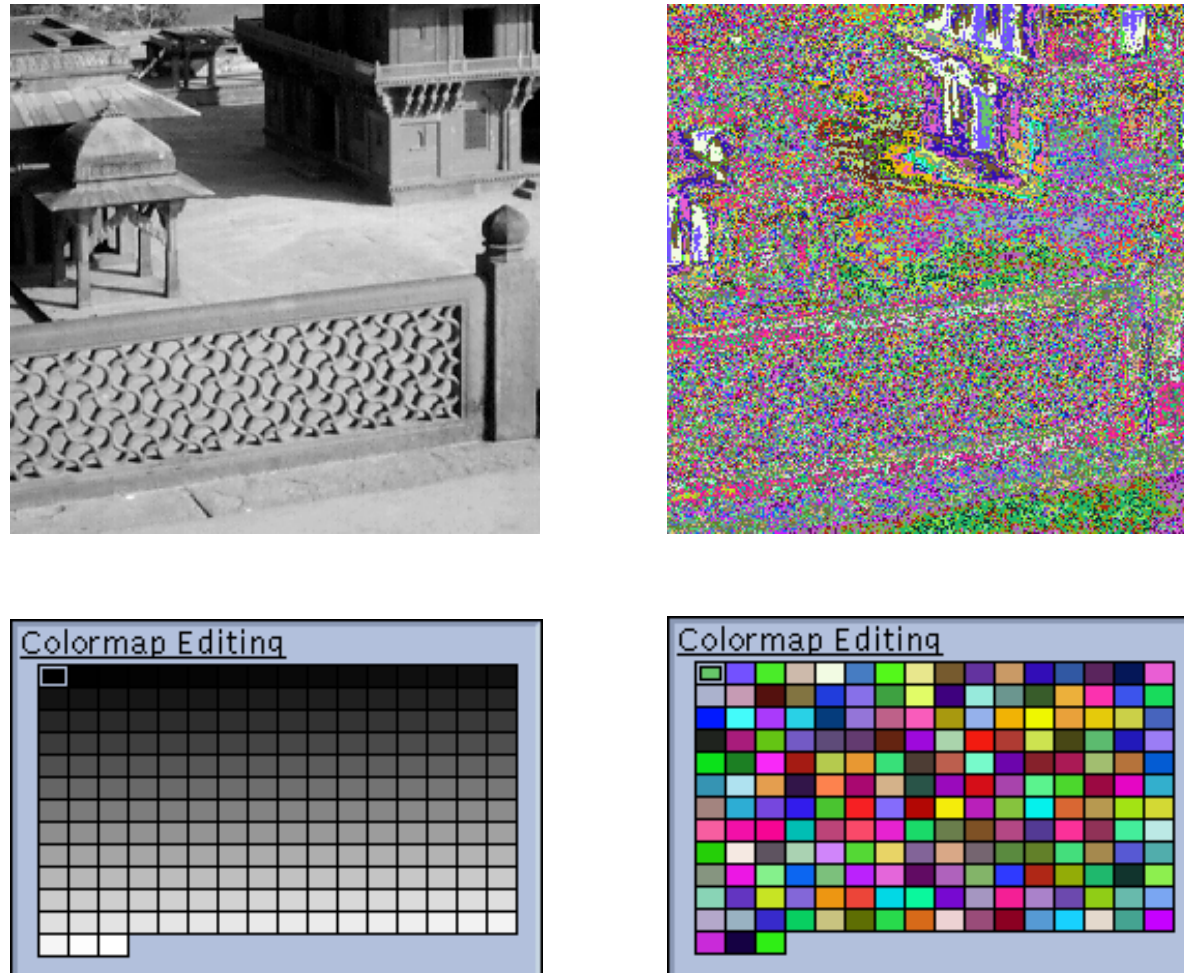


FIG. 12 – Une image en niveaux de gris, l'équivalent avec une palette de couleurs aléatoires et les palettes respectives.

La couleur des objets

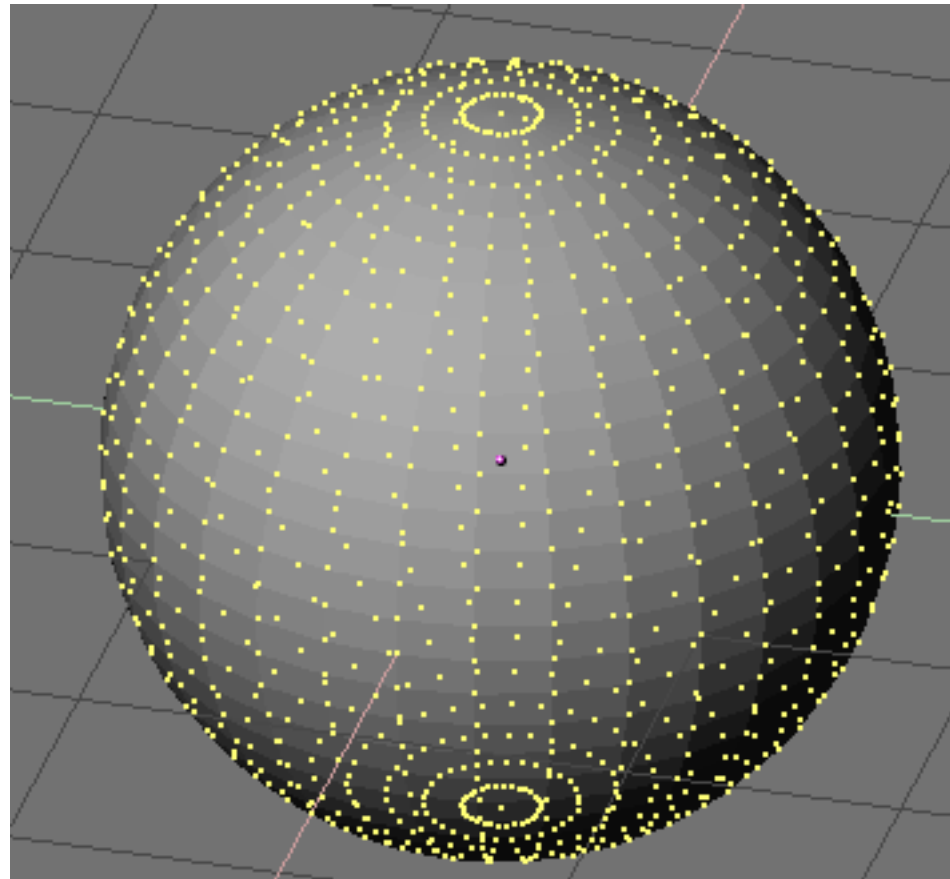


FIG. 13 – Une image de synthèse 3D.

Effets visuels

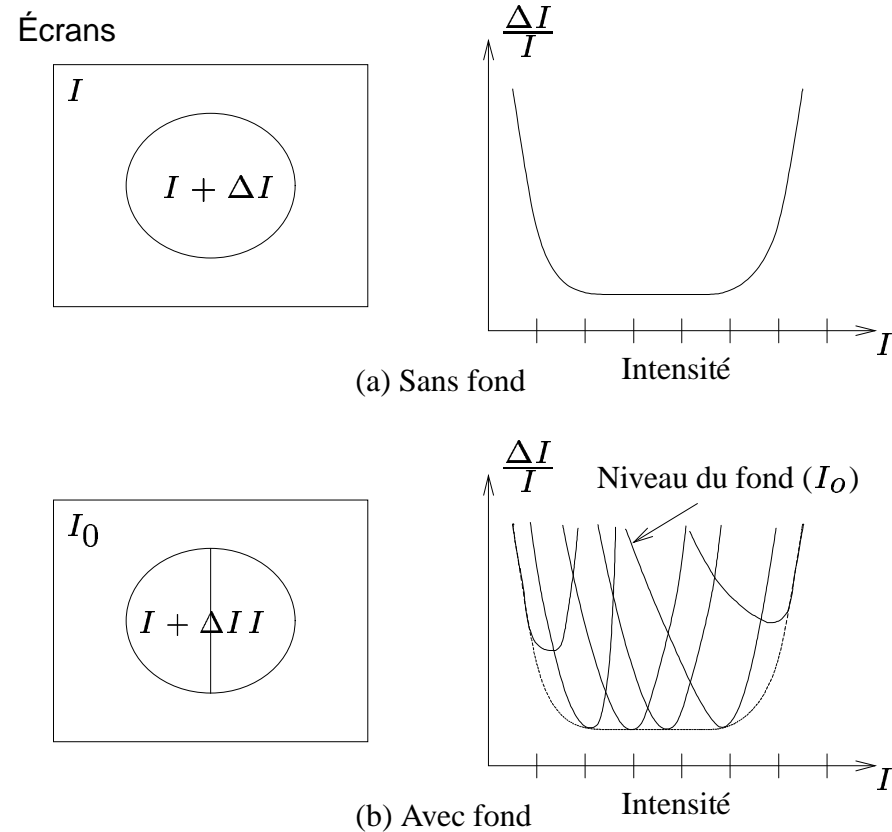


FIG. 14 – Différents arrangements expérimentaux permettant d'étudier les variations supraliminaires d'intensité, ΔI , à partir de l'intensité I .

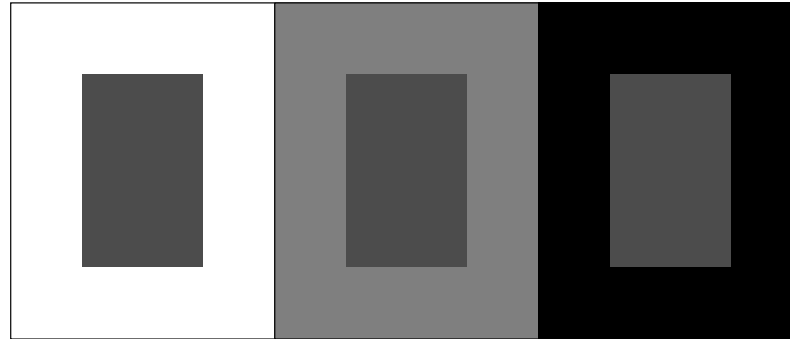


FIG. 15 – Illustration d'un effet perceptif.

Usage de bits de transparence

Soient

- $i(x, y)$ la valeur de l'image au point (x, y)
- $t(x, y)$ la valeur de transparence (typiquement 1 ou 8 bits)
- $o(x, y)$ la valeur de l'image finale

Le principe consiste à appliquer la formule suivante : $o(x, y) = \frac{t(x, y)}{255} i(x, y)$

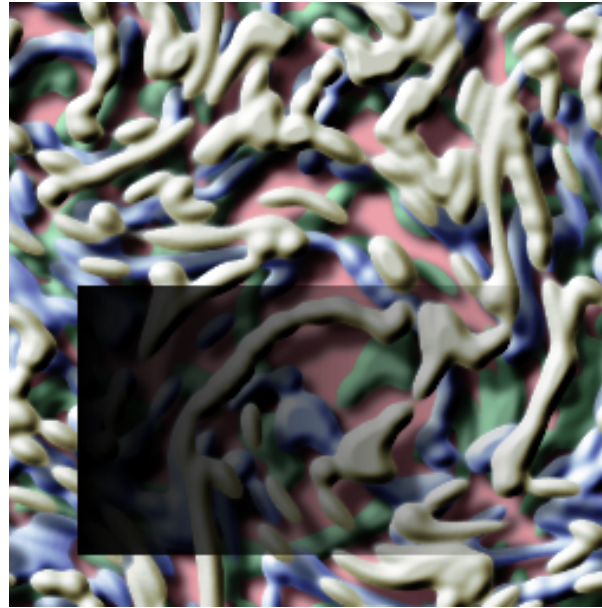
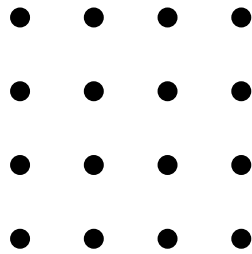
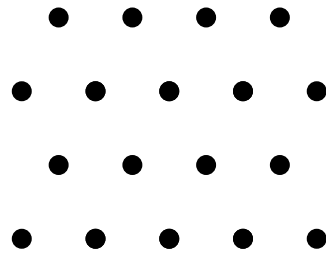
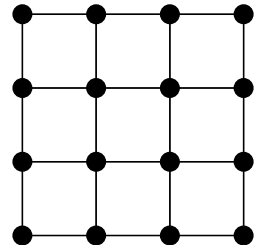
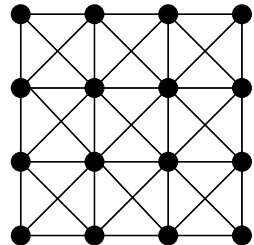
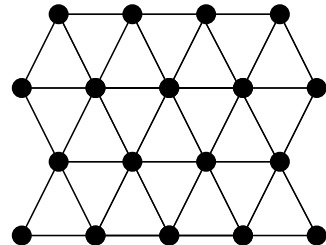


FIG. 16 – Utilisation de bits de transparence à l'intérieur du petit rectangle.

Structure d'échantillonnage et trame

- Chaque point est appelé *pixel* (pour *picture element*).
- Il existe deux sortes de trame suivant la grille d'échantillonnage adoptée.

Trame carrée		Trame hexagonale
		
4-connexité	8-connexité	6-connexité
		

TAB. 2 – Types de trames couramment utilisées et connexités associées.

Types d'images

2D. Il s'agit d'une matrice bidimensionnelle de valeurs. Ces valeurs (luminance, couleurs, ...) sont par exemple issues de l'échantillonnage d'une image fixe.

3D. Cette fois, le jeu de valeurs est défini sur base d'une grille d'échantillonnage tridimensionnelle. On obtient cette type d'images par scanner par exemple. La plupart des techniques de traitement d'image bidimensionnelles se généralisent sans peine à des images $3D$.

2D+t. Comme t représente le temps, les images $2D+t$ désignent une animation, une séquence vidéo ou les images d'un film.

3D+t. Les images de type $3D+t$ sont des images tridimensionnelles animées. Il s'agit par exemple d'images de synthèse $3D$ animées.

Vidéo et entrelacement

On représente une image $2D + t$ comme une succession d'images numériques $2D$.

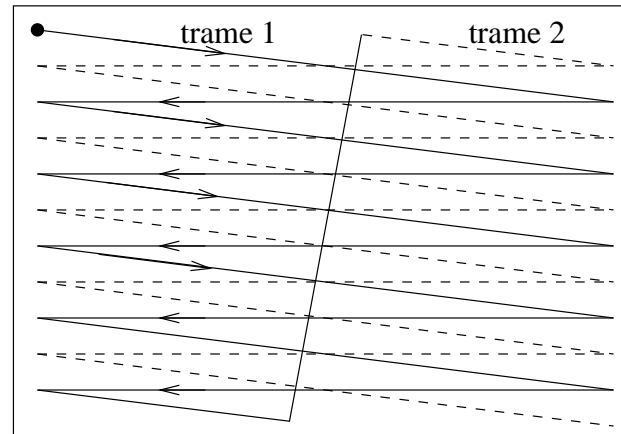


FIG. 17 – Description du format entrelacé.

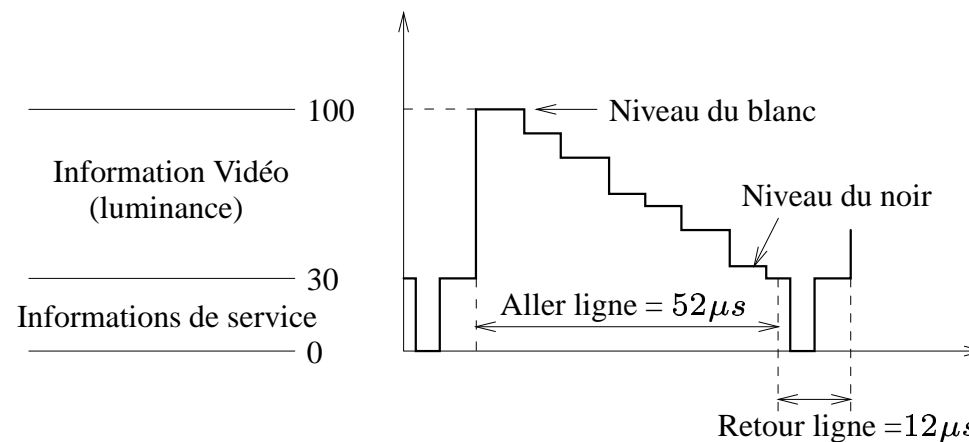


FIG. 18 – Une ligne du signal de luminance d'un téléviseur.

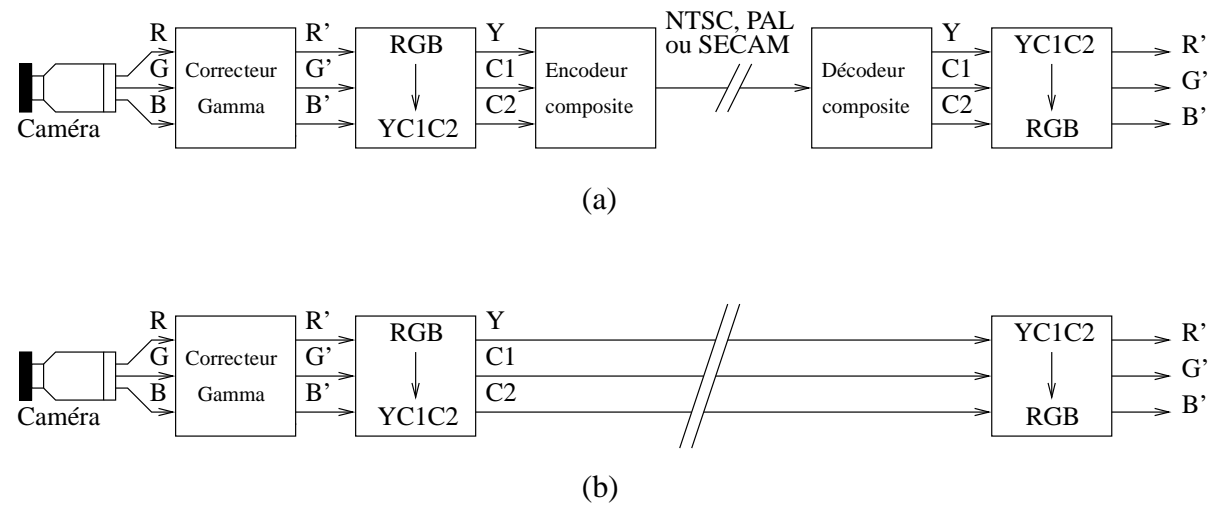
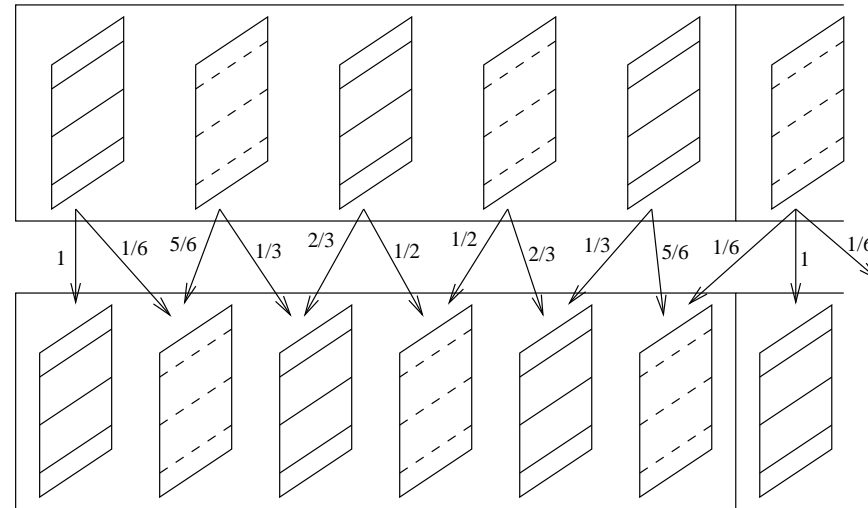


FIG. 19 – Chaîne de transmission des signaux de télévision composites.

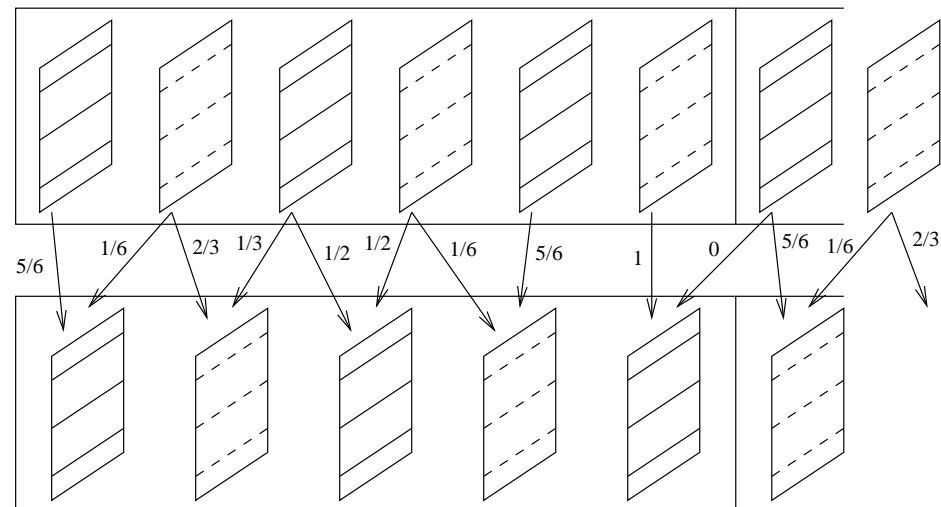
Standards de télévision analogiques

Paramètres	PAL	NTSC	SÉCAM
Fréquence de trame [Hz]	50	59,94	50
Nombre de lignes par trame	625	525	625
Facteur de correction gamma γ	2,8	2,2	2,8
Porteuse audio [MHz]	QAM	4,5	FM
Porteuse couleur [MHz]	4,43	3,57	4,25 (+U) - 4,4 (-V)
Technique de modulation des signaux de couleur	QAM	QAM	FM
Largeur de bande de la luminance [MHz]	5,0 ou 5,5	4,2	6.0
Largeur de bande des chrominances [MHz]	1,3 (U et V)	1,3 (I) - 0,6 (Q)	>1,0 (U et V)

Changement de la fréquence image



(a) Conversion 50Hz vers 60Hz



(b) Conversion 60Hz vers 50Hz

Structures de données

- Structures de données informatiques classiques : matrices (ou tableaux), vecteurs, arbres, listes, piles, ...
- Certaines structures de données ont été adaptées et enrichies pour le traitement d'images. Il s'agit par exemple de la structure en arbre quaternaire, appelé *quad-tree*.

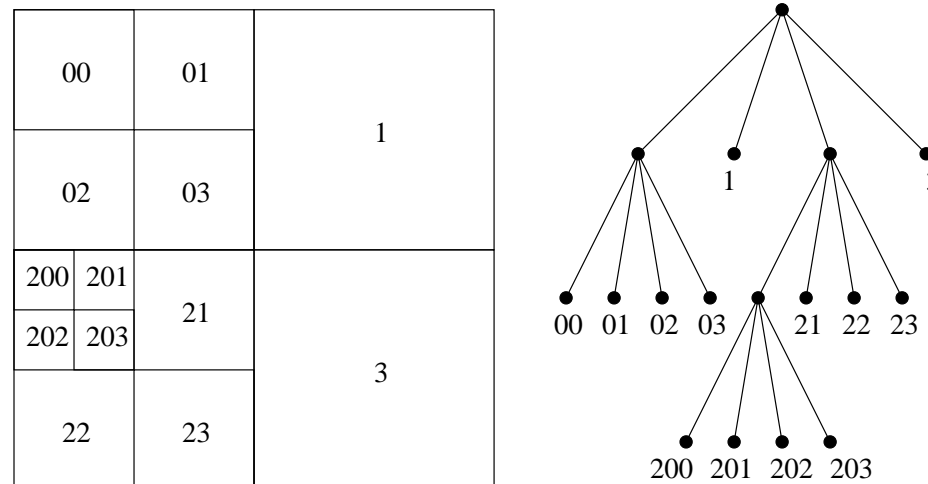
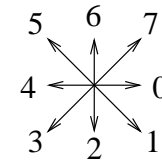
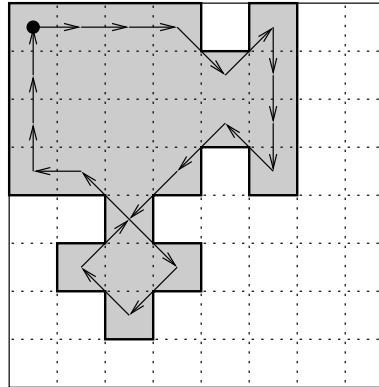


FIG. 20 – Découpage d'une image en arbre quaternaire.

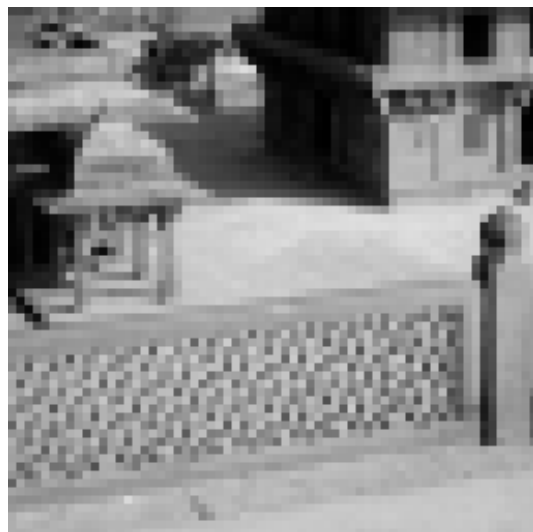
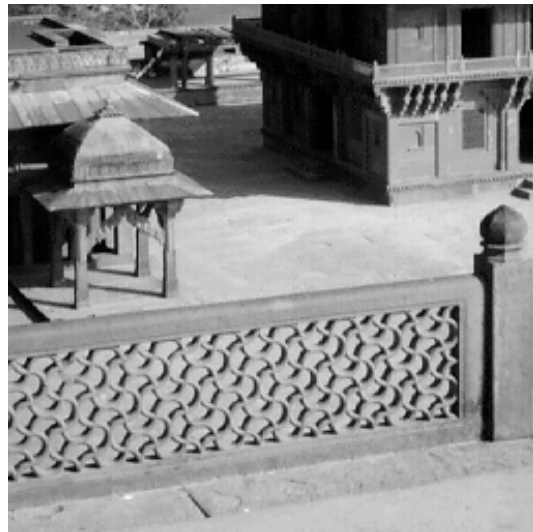
– *Lacet ou chain code*



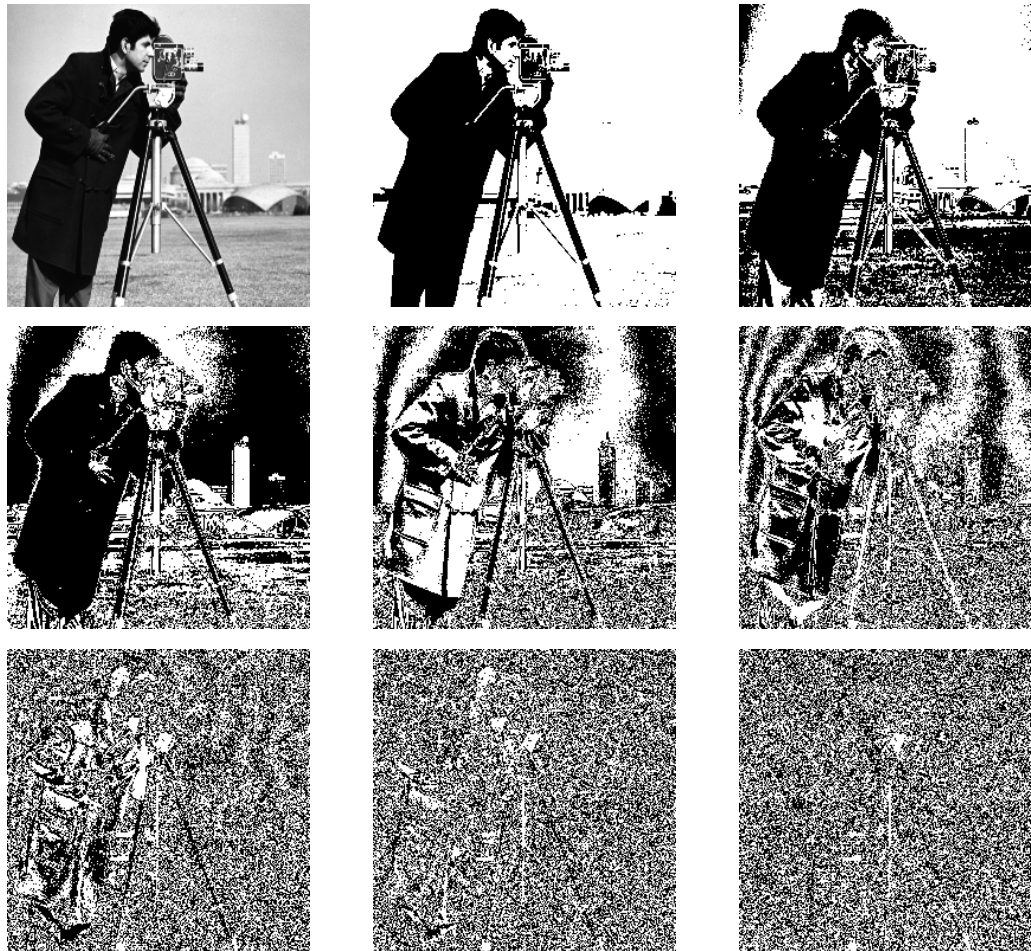
Code : 00017222533135754666

FIG. 21 – Description d'une forme par suivi du contour.

Résolution



Décomposition d'une image en plans binaires



TAB. 3 – Image originale et plans binaires en partant du MSB.

Critères de qualité et mesures de distorsion

Soient une image originale f de taille $N \times N$ et \hat{f} l'image traitée.

Définition 1 [Mean Square Error]

$$MSE = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(j, k) - \hat{f}(j, k) \right)^2 \quad (7)$$

Définition 2 [Signal to noise ratio]

$$SNR = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (f(j, k))^2}{\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(j, k) - \hat{f}(j, k) \right)^2} \quad (8)$$

Définition 3 [Peak signal to noise ratio]

$$PSNR = \frac{N^2 \times 255}{\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(j, k) - \hat{f}(j, k) \right)^2} \quad (9)$$

Visualisation 3D d'une image 2D

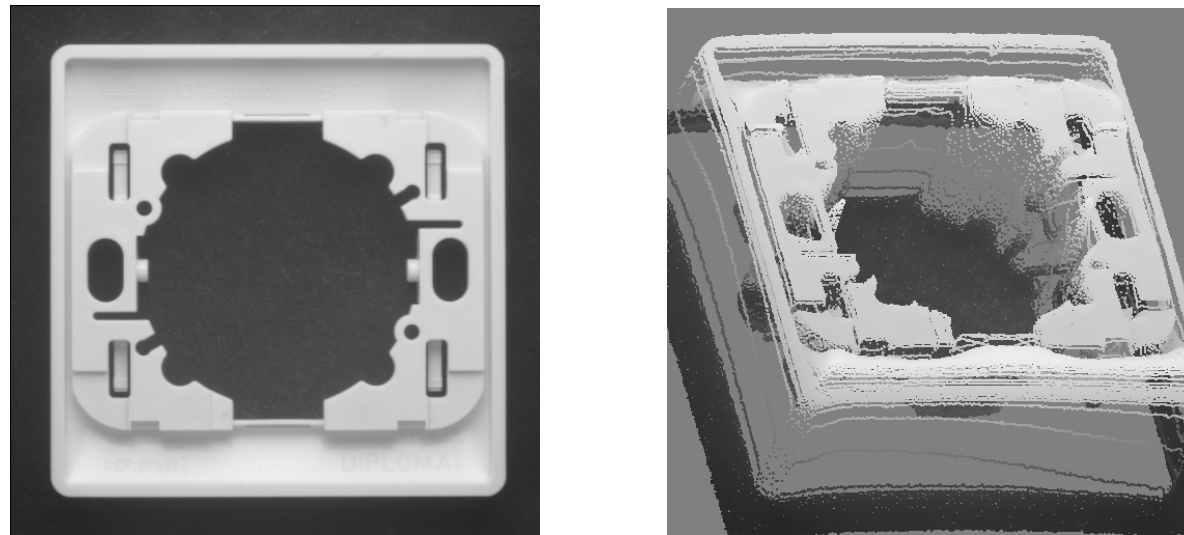
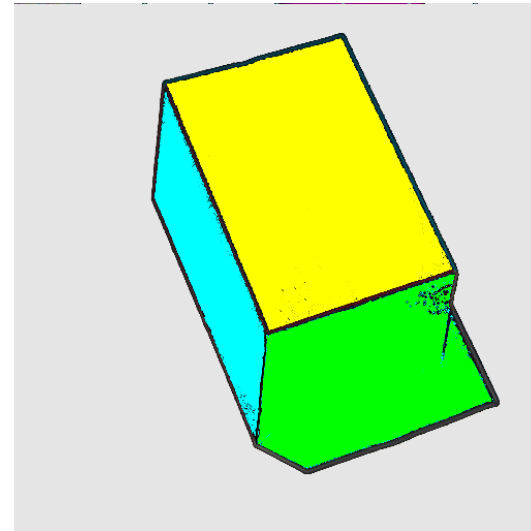
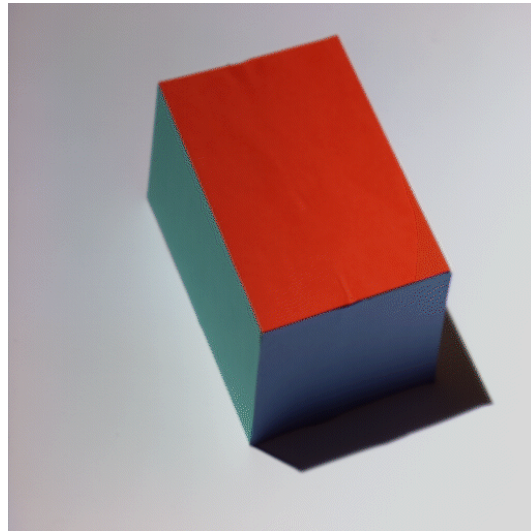
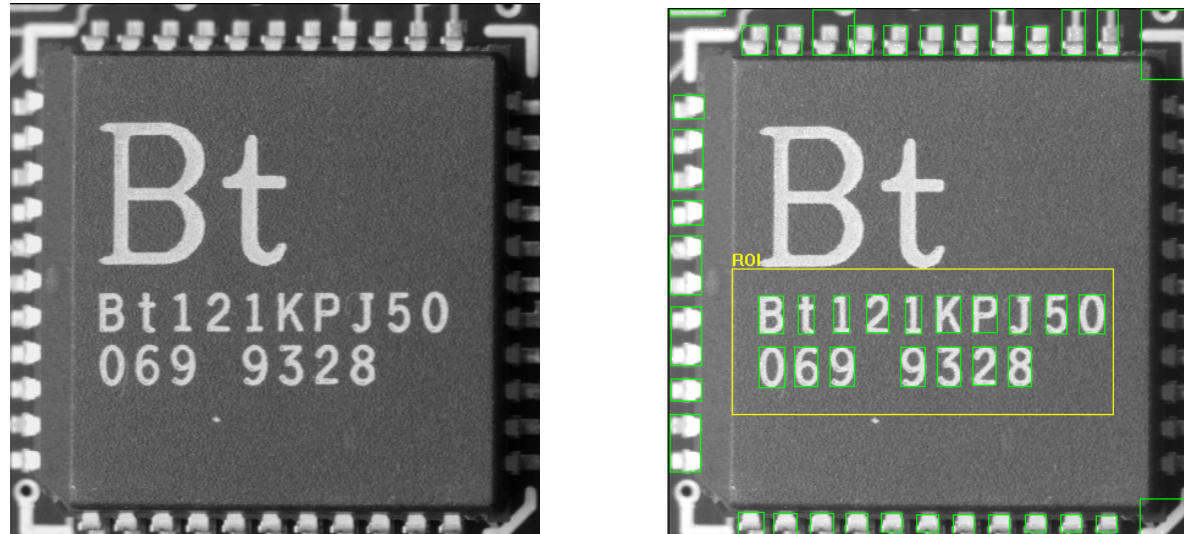


FIG. 22 – Une image et visualisation de la profondeur sous la forme d'une image 3D.

Segmentation d'images



Reconnaissance de caractères



Plusieurs étapes :

- Détection d'une *région d'intérêt (Region Of Interest (ROI))*
- Détection des contours
- Identification et classement des caractères

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire
- Rehaussement et restauration
- Segmentation d'images
- Tomographie par rayons X

Transformations unitaires : la transformée de FOURIER

Définition 4 La transformée de FOURIER d'une image $f(x, y)$ est définie par

$$\mathcal{F}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2\pi j(xu + yv)} dx dy$$

Transformée inverse

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(u, v) e^{2\pi j(ux + vy)} du dv \quad (10)$$

Interprétation : décomposition de l'image en composantes fréquentielles définie sur $[-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty]$. $f(x, y)$ et $\mathcal{F}(u, v)$ forment une paire de transformée de FOURIER représentée par

$$f(x, y) \rightleftharpoons \mathcal{F}(u, v)$$

En général, $\mathcal{F}(u, v)$ est une fonction de u et de v à valeurs complexes. Nous pouvons donc l'exprimer sous la forme

$$\mathcal{F}(u, v) = \|\mathcal{F}(u, v)\| e^{j\theta(u, v)}$$

Cas particulier : $f(x, y)$ est une fonction à valeurs réelles

$$\mathcal{F}(-u, -v) = \mathcal{F}^*(u, v) \quad (11)$$

Dès lors,

$$\|\mathcal{F}(-u, -v)\| = \|\mathcal{F}(u, v)\| \quad (12)$$

$$\theta(-u, -v) = -\theta(u, v) \quad (13)$$

On peut en déduire deux propriétés importantes d'une image à valeurs réelles :

1. le spectre fréquentiel de l'image est symétrique par rapport à l'origine du système d'axes $u - v$. C'est-à-dire que la connaissance d'un demi-plan suffit.
2. le spectre de phase de l'image est anti-symétrique par rapport à l'origine du système d'axes $u - v$.

Propriétés

1. Séparabilité

En permutant l'ordre d'intégration

$$\mathcal{F}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2\pi j x u} dx \right] e^{-2\pi j y v} dy \quad (14)$$

2. Linéarité

Soient $f_1(x, y) \Rightarrow \mathcal{F}_1(u, v)$ et $f_2(x, y) \Rightarrow \mathcal{F}_2(u, v)$. Alors, pour toutes constantes c_1 et c_2 ,

$$c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) \Rightarrow c_1 \mathcal{F}_1(u, v) + c_2 \mathcal{F}_2(u, v) \quad (15)$$

3. Homothétie

Si $f(x, y) \Rightarrow \mathcal{F}(u, v)$, alors

$$f(ax, by) \Rightarrow \frac{1}{|ab|} \mathcal{F}\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (16)$$

4. Translation spatiale

Si $f(x, y) \Rightarrow \mathcal{F}(u, v)$, alors

$$f(x - x_0, y - y_0) \Rightarrow \mathcal{F}(u, v) e^{-2\pi j(x_0 u + y_0 v)}$$

5. Translation fréquentielle

Si $f(x, y) \Rightarrow \mathcal{F}(u, v)$, alors

$$f(x, y) e^{j2\pi(u_0 x + v_0 y)} \Rightarrow \mathcal{F}(u - u_0, v - v_0) \quad (17)$$

6. Aires

Si $f(x, y) \Rightarrow \mathcal{F}(u, v)$, alors

$$\mathcal{F}(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy \quad (18)$$

Le coefficient $\mathcal{F}(0, 0)$, appelé parfois *composante DC*.

La fonction Rectangle

Considérons l'image $f(x, y)$ définie par

$$f(x, y) = ARect_{a,b}(x, y) \quad (19)$$

où

$$Rect_{a,b}(x, y) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{a}{2}, |y| < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (20)$$

$$\mathcal{F}(u, v) = \int_{-a/2}^{+a/2} dx \int_{-b/2}^{+b/2} dy A e^{-2\pi j(xu+yv)} \quad (21)$$

$$= Aab \left(\frac{\sin(\pi au)}{\pi au} \right) \left(\frac{\sin(\pi bv)}{\pi bv} \right) \quad (22)$$

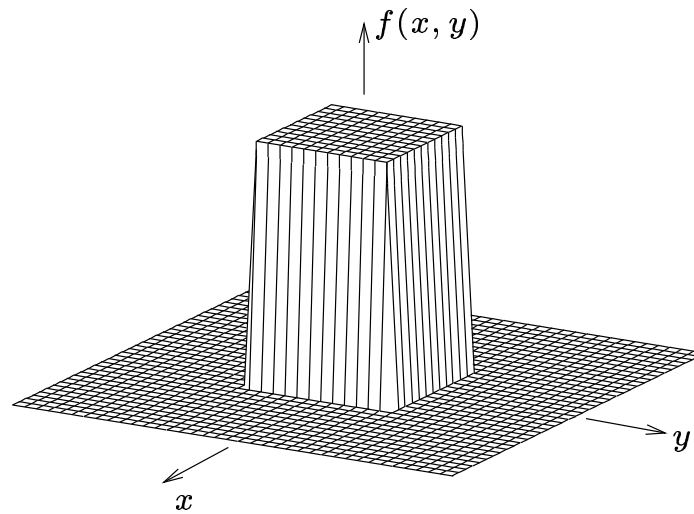


FIG. 23 – Illustration de la fonction Rectangle.

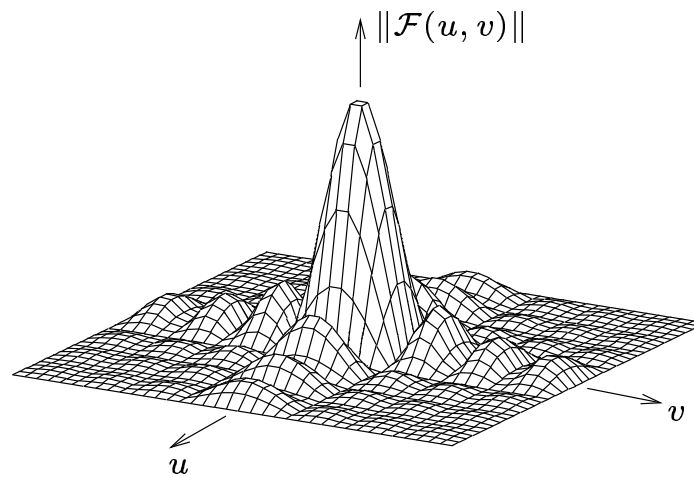


FIG. 24 – Module de la transformée de FOURIER de la fonction Rectangle.

La fonction Disque

Considérons l'image $f(x, y)$ définie par

$$f(x, y) = A \text{Disque}_R(x, y) \quad (23)$$

où

$$\text{Disque}_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} < R \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (24)$$

$$\mathcal{F}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2\pi j(xu + yv)} dx dy \quad (25)$$

$$= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} A e^{-2\pi j r (u \cos \theta + v \sin \theta)} d\theta \quad (26)$$

$$\mathcal{F}(u, v) = AR \frac{J_1(2\pi R \sqrt{u^2 + v^2})}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (27)$$

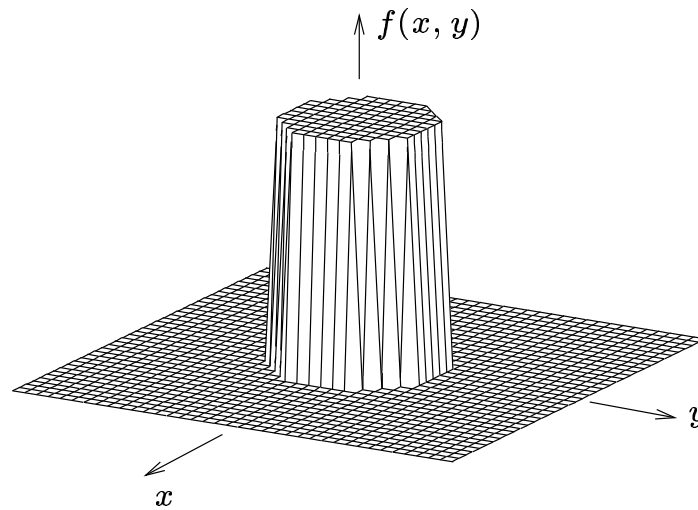


FIG. 25 – Illustration de la fonction Disque.

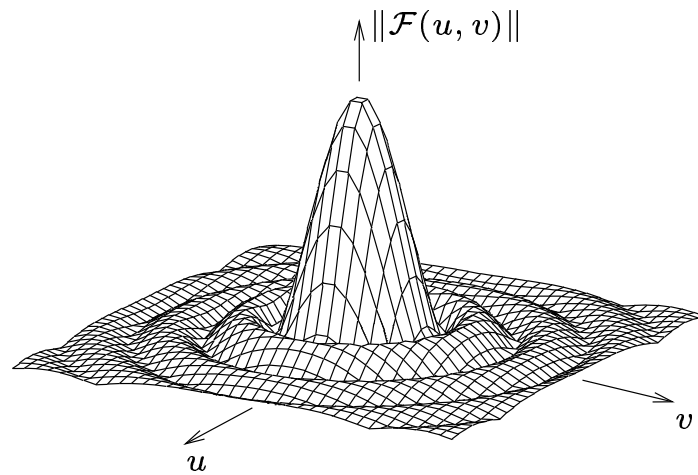


FIG. 26 – Module de la transformée de FOURIER de la fonction Disque.

Visualisation



FIG. 27 – L'image *Lena* et le module de sa transformée de FOURIER.

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire
- Rehaussement et restauration
- Segmentation d'images
- Tomographie par rayons X

Filtrage linéaire

- Notion de filtre idéal
- Catégories de filtres idéaux
- Passage d'une image dans un système linéaire
 - Filtres passe-bas
 - Filtres passe-haut

Notion de filtre idéal

On dira d'un filtre qu'il est *idéal* s'il multiplie tous les coefficients transformés par 0 ou par 1.

Définition 5 [Filtre idéal] *Un filtre est idéal si sa transmittance est telle que*

$$\forall (u, v), \mathcal{H}(u, v) = 0 \text{ ou } 1 \quad (28)$$

La notion de filtre idéal est intimement liée à celle d'idempotence. L'idempotence doit être comprise ici telle que, pour toute image $f(x, y)$,

$$\mathcal{F}(u, v)\mathcal{H}(u, v) = \mathcal{F}(u, v)\mathcal{H}(u, v)\mathcal{H}(u, v) \quad (29)$$

Catégories de filtres idéaux

Dans le cas d'un signal unidimensionnel

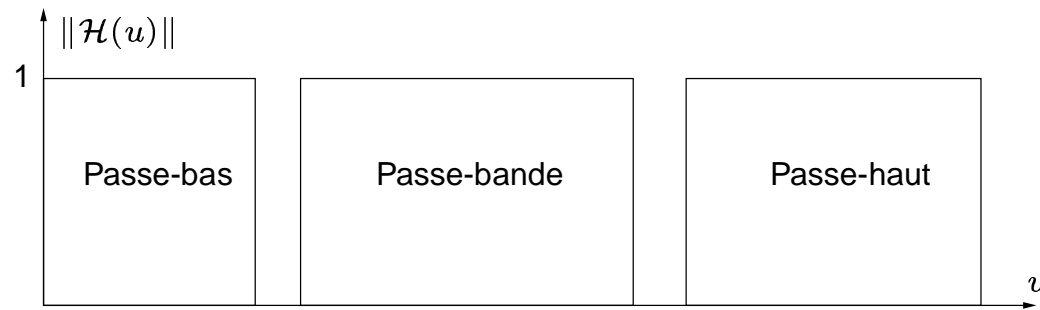


FIG. 28 – Filtres idéaux unidimensionnels.

Trois types de filtres idéaux à symétrie circulaire

– les *filtres passe-bas*

$$\mathcal{H}(u, v) = \begin{cases} 1 & \sqrt{u^2 + v^2} \leq R_0 \\ 0 & \sqrt{u^2 + v^2} > R_0 \end{cases} \quad (30)$$



(a) Image originale



(b) Image filtrée

FIG. 29 – Filtrage passe-bas d'une image.

– les *filtres passe-haut*

$$\mathcal{H}(u, v) = \begin{cases} 1 & \sqrt{u^2 + v^2} \geq R_0 \\ 0 & \sqrt{u^2 + v^2} < R_0 \end{cases} \quad (31)$$

- les *filtres passe-bande*. Ils sont équivalents au complémentaire d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut.

$$\mathcal{H}(u, v) = \begin{cases} 1 & R_0 \leq \sqrt{u^2 + v^2} \leq R_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (32)$$

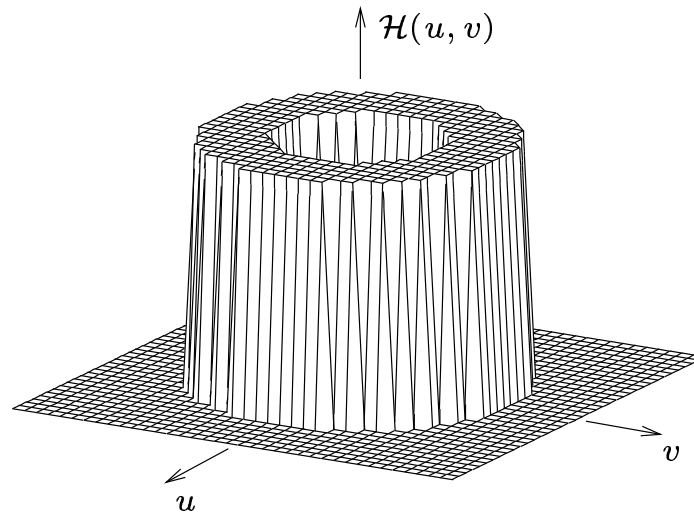


FIG. 30 – Fonction de transfert du filtre passe-bande idéal.

Illustration des effets du filtrage

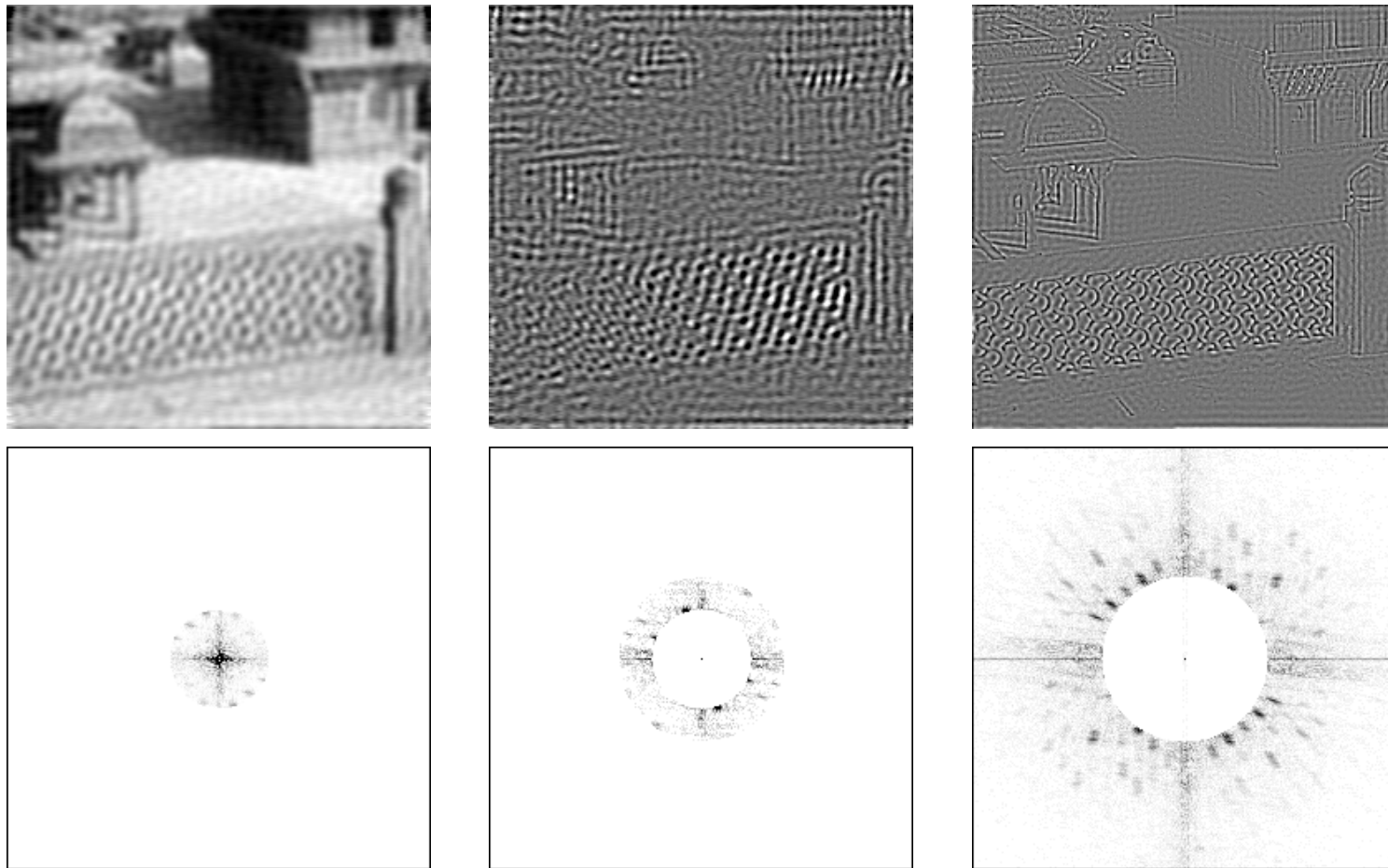


FIG. 31 – Images filtrées au moyen de filtres idéaux circulaires et spectres correspondants.

Passage d'une image dans un système linéaire

Un filtre linéaire bidimensionnel est caractérisé par sa *réponse impulsionnelle* $h(x, y)$. L'image de sortie $g(x, y)$ résulte du produit de convolution de la réponse impulsionnelle du filtre par l'image d'entrée $f(x, y)$

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (33)$$

qui est encore noté

$$g(x, y) = (f \otimes h)(x, y) \quad (34)$$

Par la propriété de convolution de la transformée de FOURIER, nous pouvons encore écrire

$$\mathcal{G}(u, v) = \mathcal{H}(u, v) \mathcal{F}(u, v)$$

Filtres passe-bas

Un exemple commun de filtre passe-bas est le filtre passe-bas de BUTTERWORTH d'ordre n défini par la fonction de transfert suivante

$$\mathcal{H}(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{R_0} \right)^{2n}} \quad (35)$$

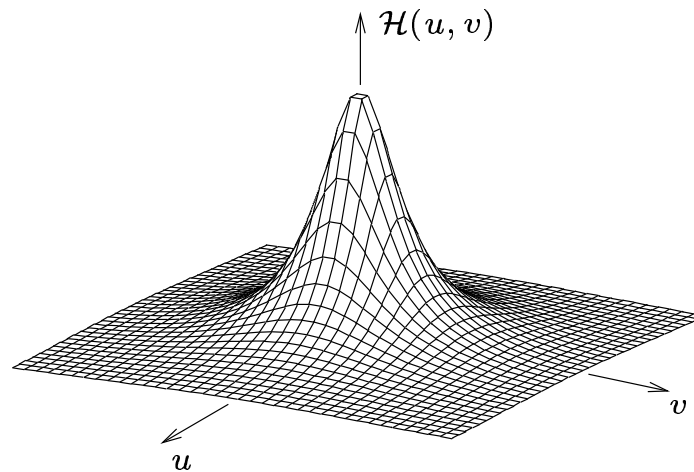
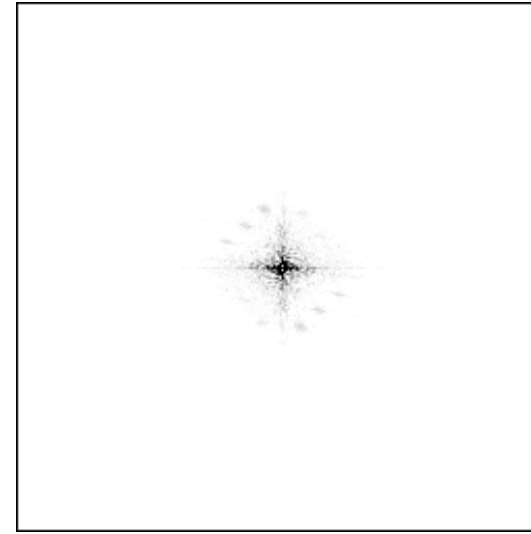


FIG. 32 – Transmittance du filtre passe-bas de BUTTERWORTH pour $n = 1$.



(a) Image filtrée

(b) Spectre de l'image filtrée

FIG. 33 – Image filtrée par un filtre passe-bas de BUTTERWORTH d'ordre 1 ($f_c = 30$).

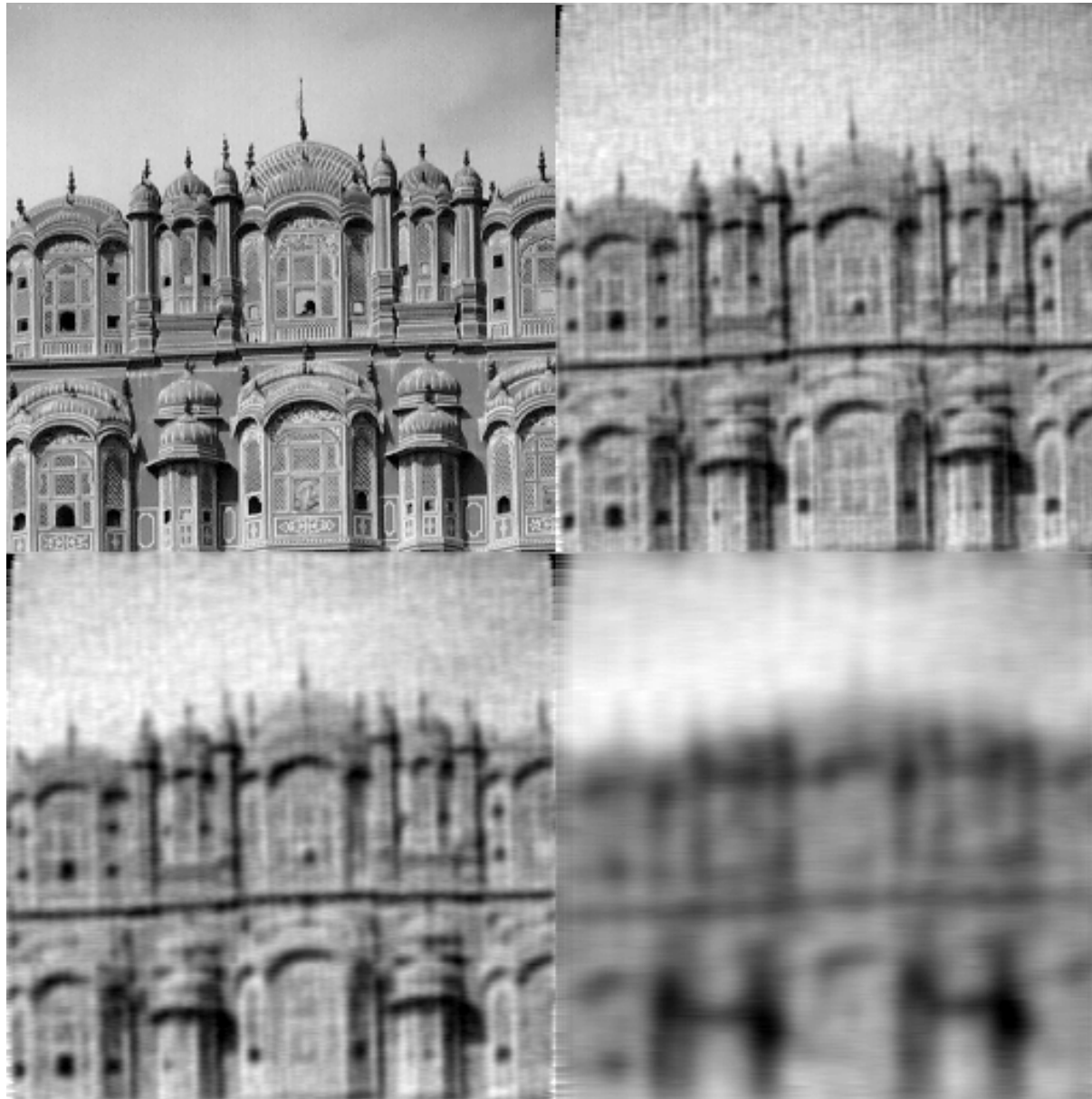
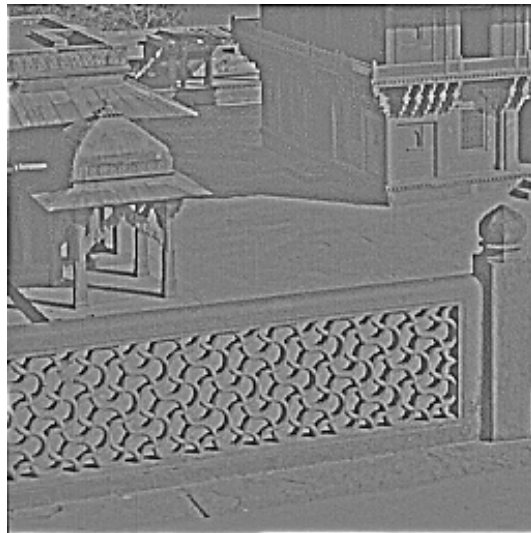


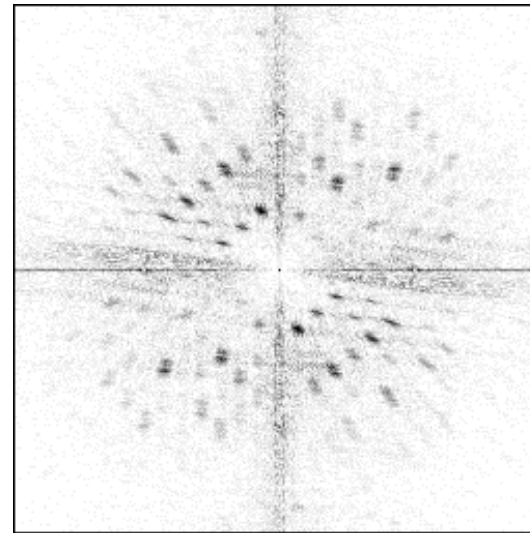
FIG. 34 – Effet d'un filtrage passe-bas sur une image.

Filtres passe-haut

$$\mathcal{H}(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_0}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)^{2n}} \quad (36)$$



(a) Image filtrée



(b) Spectre de l'image filtrée

FIG. 35 – Image filtrée par un filtre passe-haut de BUTTERWORTH d'ordre 1 ($f_c = 50$).

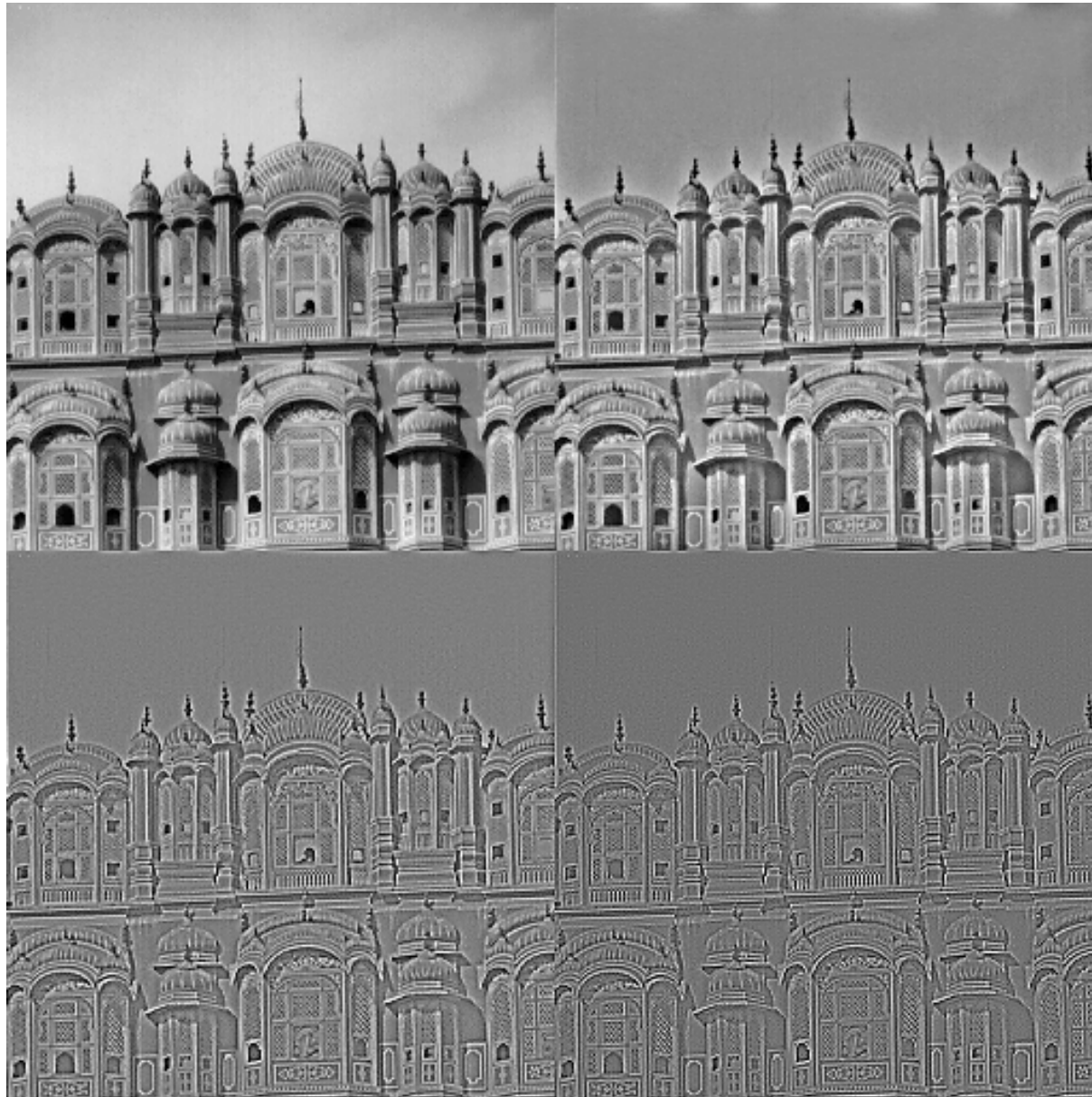


FIG. 36 – Effet d'un filtrage passe-haut sur une image.

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire
- Rehaussement et restauration
- Segmentation d'images
- Tomographie par rayons X

Rehaussement et restauration

- Généralités
- Rehaussement
 - Définition
 - Rehaussement par accentuation des contours
 - Manipulation de l'histogramme

Généralités

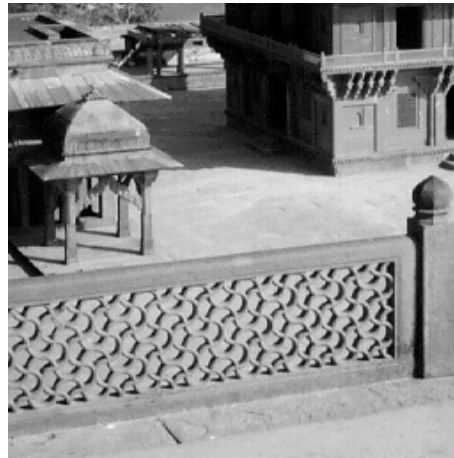
On distingue deux grandes familles de procédés de correction des défauts :

- le *rehaussement*, qui consiste à donner à l'image un aspect visuellement correct, et
- la *restauration*, qui cherche à rétablir la valeur exacte des pixels.

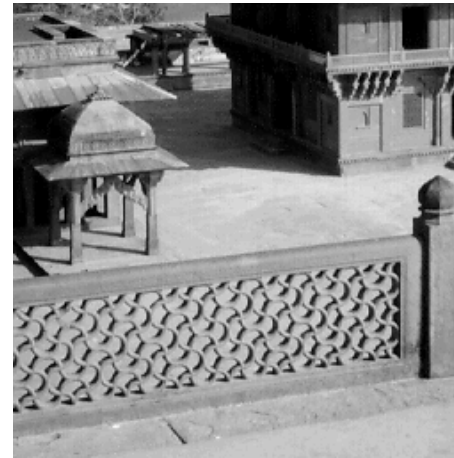
Démarche de la restauration : recherche d'une *estimation* $\hat{f}(x, y)$ de l'image $f(x, y)$ qui minimise une fonction d'erreur $e(x, y) = e(\hat{f}, f)$. Par exemple,

$$e(\hat{f}, f) = \frac{1}{MN} \sum_x \sum_y (\hat{f}(x, y) - f(x, y))^2 \quad (37)$$

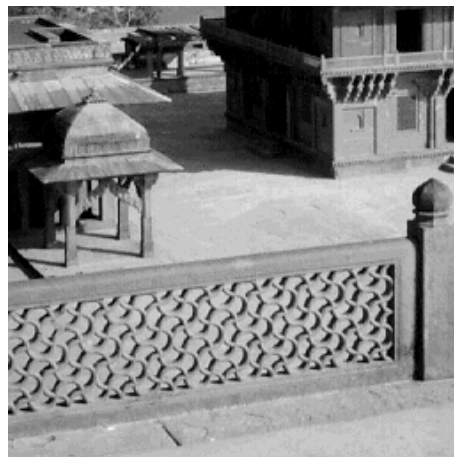
Marge de manœuvre ?



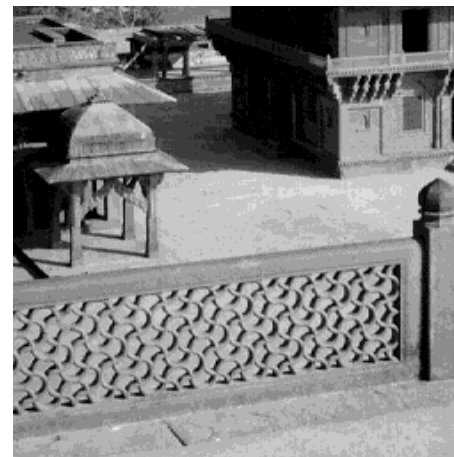
(a) Image originale f



(b) Arrondi à 5



(c) Arrondi à 10



(d) Arrondi à 20

FIG. 37 – Seuil de visibilité pour une opération d'arrondi.

Définition du rehaussement

Soit L la valeur maximale de l'image $f(x, y)$. Considérons une image à valeurs positives, c'-à-d. que $\forall x, y, f(x, y) \geq 0$. En définitive, $f(x, y) \in [0, L[$.

Définition 6 *Le rehaussement consiste à appliquer une fonction croissante $g()$ à toutes les valeurs l de l'image telle que $g(0) = 0$ et $g(L) = L$.*

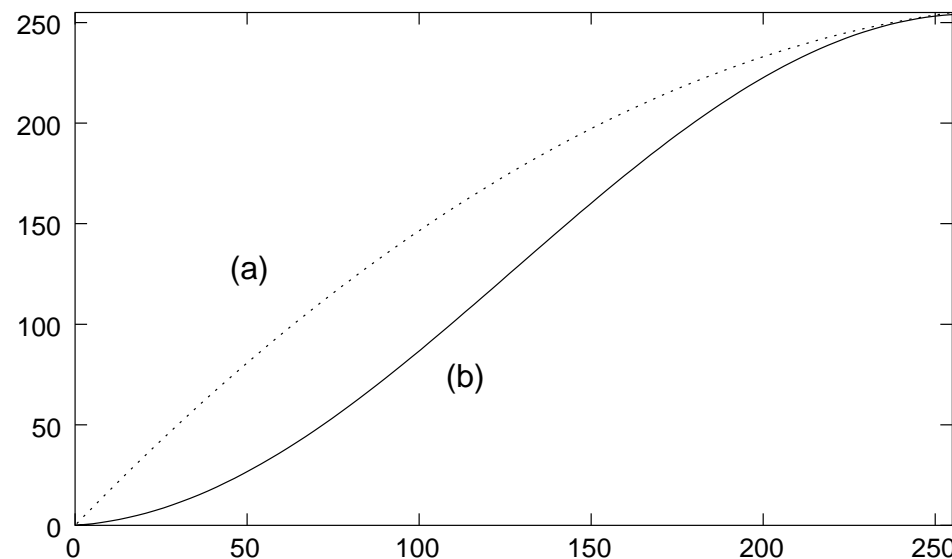
Rehaussement par fonction croissante

On peut utiliser une fonction parabolique de la forme suivante

$$g(l) = l + \alpha l(L - l) \quad (38)$$

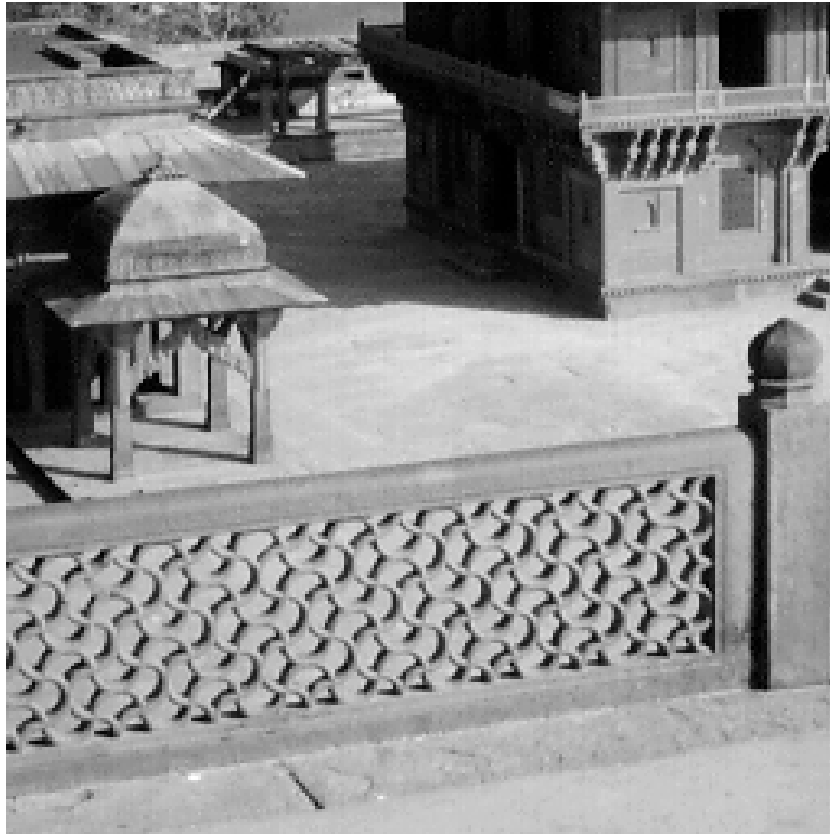
Un autre type de courbes consiste à appliquer une forme de S dans la partie centrale

$$g(l) = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{\sin \left[\alpha \pi \left(\frac{l}{L} - \frac{1}{2} \right) \right]}{\sin \left[\alpha \frac{\pi}{2} \right]} \right), \quad \alpha \in]0, 1[\quad (39)$$

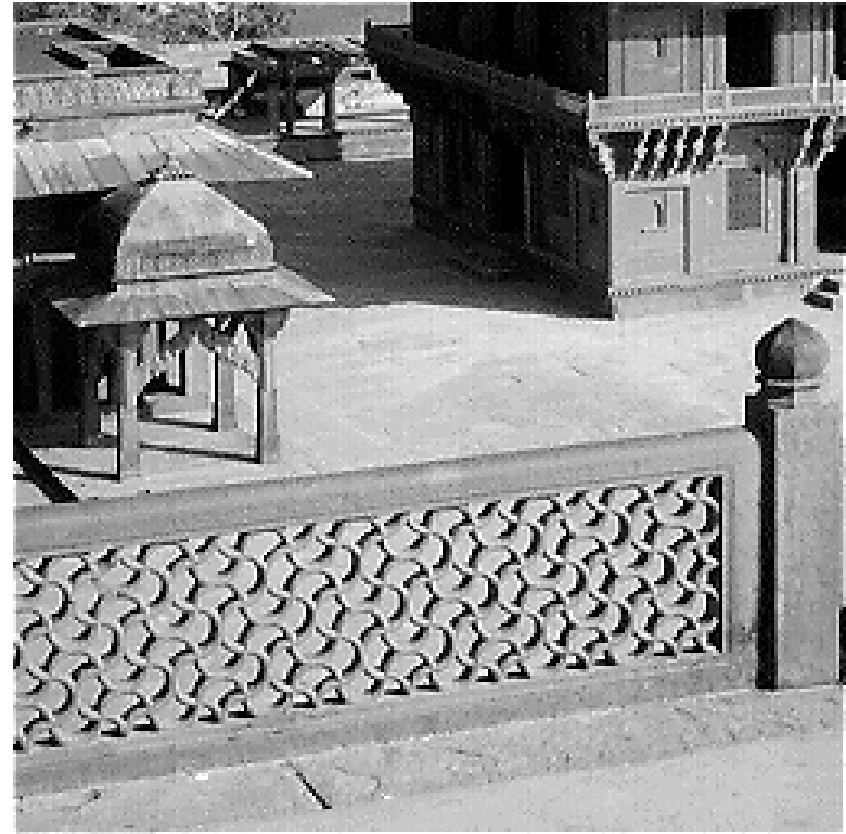


Rehaussement par accentuation des contours

$$\hat{f}(x, y) = f(x, y) - \alpha \nabla^2 f(x, y) \quad (40)$$



(a) Image originale f



(b) $f - \alpha \nabla^2 f$

FIG. 38 – Rehaussement des contours ($\alpha = \frac{1}{3}$).

Manipulation de l'histogramme

Objectif : déterminer la relation entre une image d'entrée et une traitée par modification de son histogramme.

Soit $o(x, y)$ l'image de sortie. Pour une valeur l_o de l'image de sortie, il existe une fonction ϕ telle que

$$l_o = \phi(l_f) \quad (41)$$

Si cette fonction admet un inverse,

$$l_f = \phi^{-1}(l_o) \quad (42)$$

Si l'on interprète l'histogramme comme une densité de probabilité, on a

$$hist_o(l_o)dl_o = hist_f(l_f)dl_f \quad (43)$$

Dès lors,

$$hist_o(l_o) = \frac{hist_f(l_f)}{dl_o/dl_f} = \frac{hist_f(l_f)}{d\phi(l_f)/dl_f} \Big|_{l_f=\phi^{-1}(l_o)} \quad (44)$$

$$hist_o(l) = \frac{hist_f(\phi^{-1}(l))}{\frac{d\phi}{dl}(\phi^{-1}(l))} \quad (45)$$

Égalisation de l'histogramme

L'*égalisation de l'histogramme* d'une image est une méthode qui vise à assurer une distribution homogène des valeurs dans la totalité de la plage dynamique des valeurs possibles.

Idéalement, le nombre de pixels devrait valoir $\frac{A(D_f)}{L}$, où $A(D_f)$ représente l'aire du support de définition de la fonction f .

$$\frac{d\phi}{dl}(l) = \frac{L}{A(D_f)} hist_f(l) \quad (46)$$

Par intégration des membres de cette dernière relation,

$$\phi(l) = \frac{L}{A(D_f)} \int_0^l hist_f(k) dk \quad (47)$$

Comme on peut estimer la probabilité d'un niveau par le rapport de la fréquence à l'aire du domaine de définition de la fonction

$$p(l) = \frac{hist_f(l)}{A(D_f)} \quad (48)$$

De plus, la fonction de répartition F est l'intégrale cumulée des probabilités

$$F(l) = \int_0^l p(k)dk = \frac{1}{A(D_f)} \int_0^l hist_f(k)dk \quad (49)$$

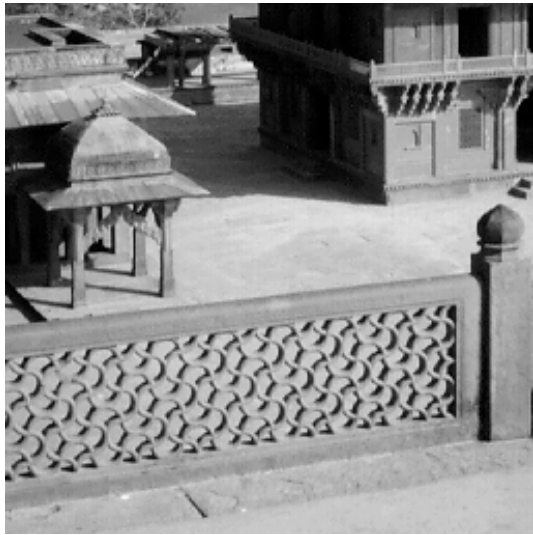
Dès lors,

$$\phi(l) = LF(l) \quad (50)$$

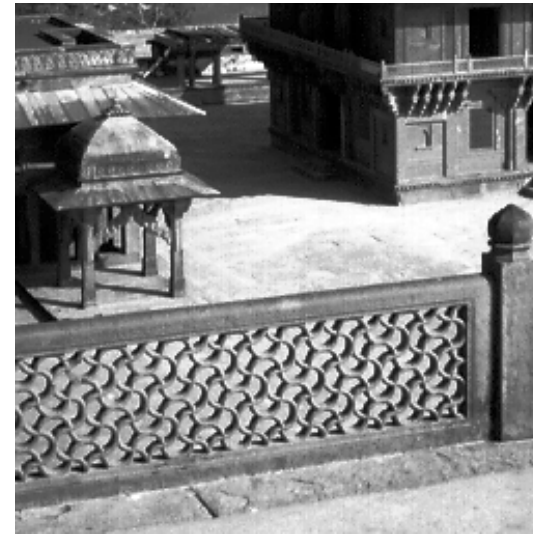
Autrement dit, l'image $o(x, y)$ traitée par la fonction qui effectue une égalisation de l'histogramme vaut

$$o(x, y) = LF(f(x, y)) \quad (51)$$

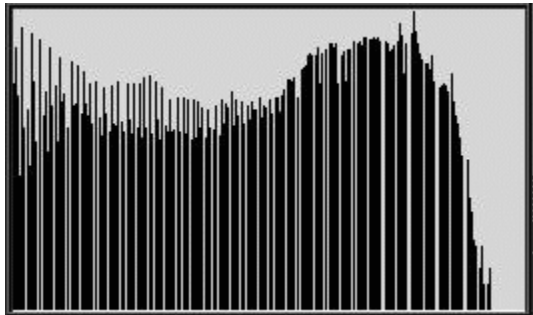
Illustration



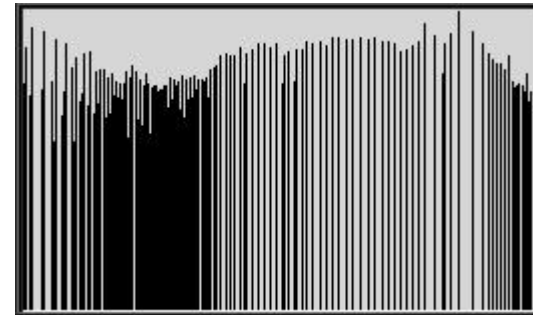
(a) Image originale f



(b) Après égalisation de l'histogramme



(c) Histogramme original



(d) Histogramme après égalisation

FIG. 39 – Égalisation d'histogramme.

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire
- Rehaussement et restauration
- Segmentation d'images
- Tomographie par rayons X

Segmentation d'images

- Présentation du problème
- Segmentation par seuillage
- Segmentation par détection de régions
 - Ligne de partage des eaux

Présentation du problème

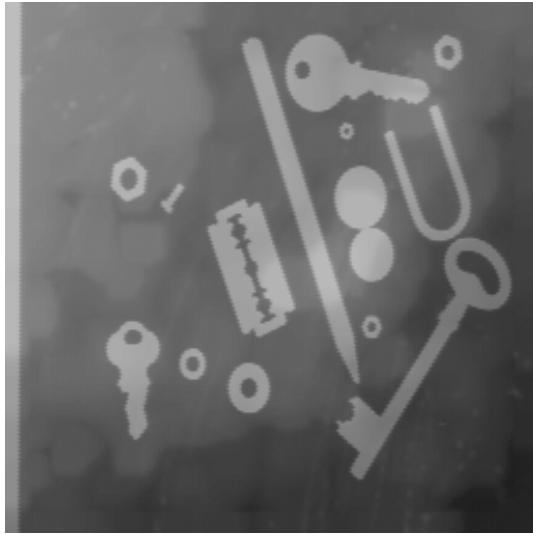
Définition 7 *En général, on considère que l'objectif de la segmentation revient à construire une série de régions R_1, \dots, R_n telles*

$$\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^n R_i \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, R_i \cap R_j = \emptyset \quad (52)$$

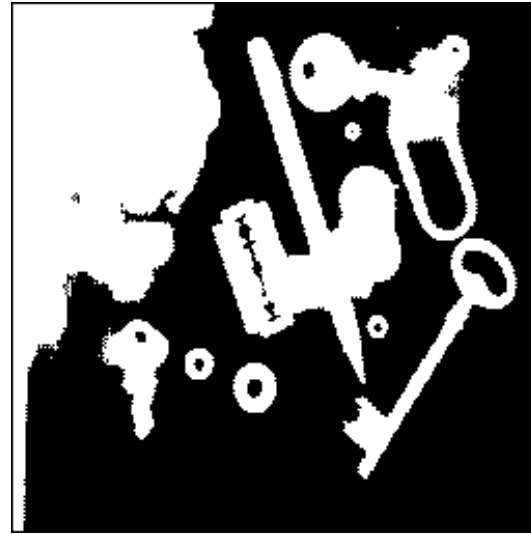
Définition 8 *Formellement, la segmentation s'apparente à un opérateur ϕ agissant sur l'image I et fournissant, par exemple, une image binaire $\phi(I)$ qui différencie les points des contours des objets.*

La segmentation, comme la plupart des techniques de traitement d'images, peut être abordée sous l'angle *local* ou *global*.

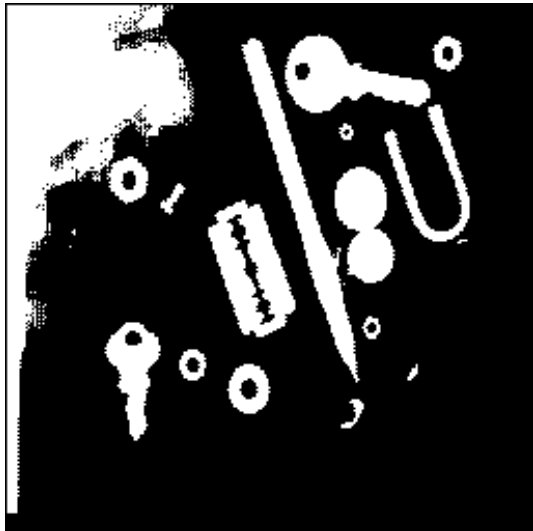
Segmentation par seuillage



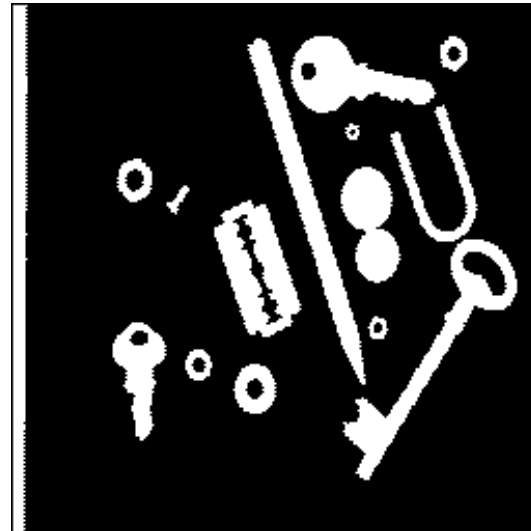
(a) Image originale



(b) Seuillage à 110



(c) Seuillage à 128



(d) Seuillage après égalisation

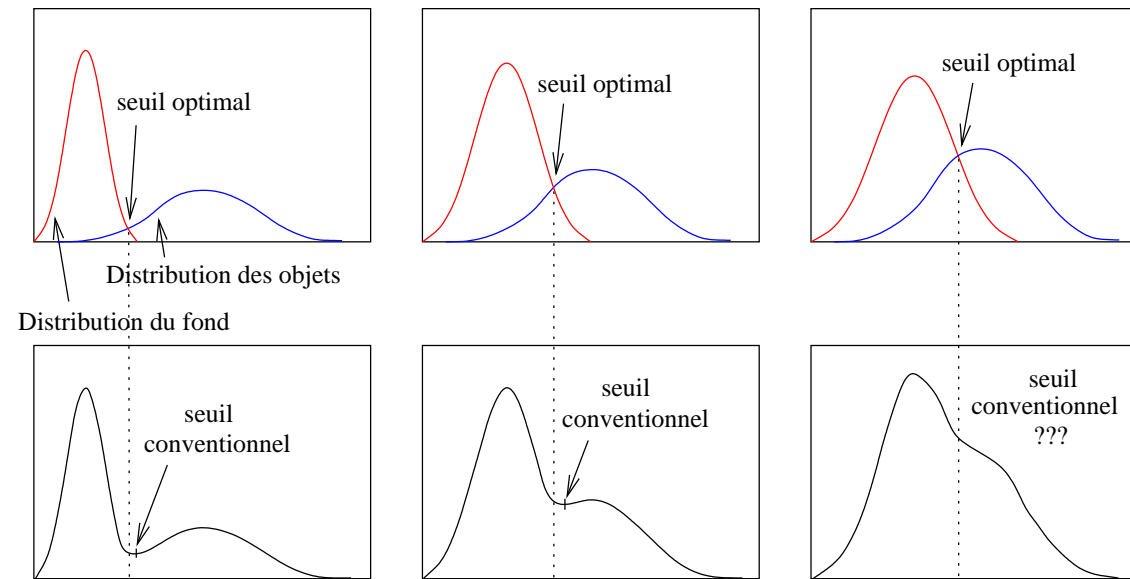


FIG. 40 – Seuillage optimal.

Segmentation par détection de régions : ligne de partage des eaux (LPE)

En termes imagés, on associe un bassin $\mathcal{C}(M)$ à chaque minimum M .

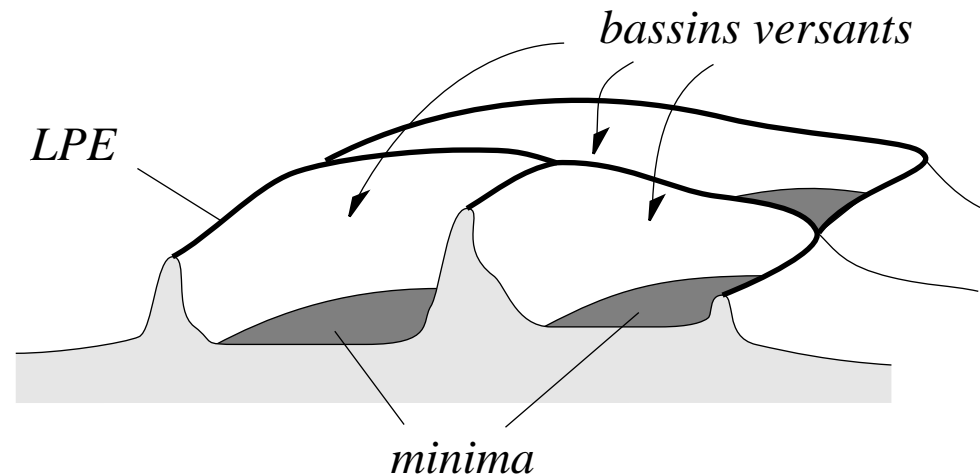


FIG. 41 – Minima, bassins versants et ligne de partage des eaux.

Expression formelle d'un algorithme de segmentation par ligne de partage des eaux

Démarche :

- le cas des *images binaires* est introduit en premier lieu.
- définition de *chemin* et *distance géodésiques*
- description d'un algorithme par *empilement d'images seuillées*

Chemin et distance géodésiques

Soit X une image binaire.

Définition 9 [Chemin géodésique] *Un chemin géodésique de longueur l entre deux points s et t est une famille de $l + 1$ pixels $x_0 = s, x_1, \dots, x_l = t$ telle que*

$$\forall i \in [0, l], x_i \in X \quad \text{et} \quad \forall i \in [0, l], x_{i-1}, x_i \text{ sont voisins} \quad (53)$$

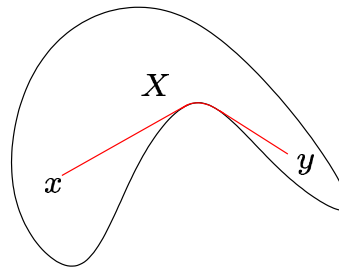


FIG. 42 – Le plus court chemin géodésique entre x et y .

Définition 10 [Distance géodésique] *La distance géodésique entre les points s et t est la longueur du plus court chemin géodésique reliant s à t ; elle est infinie si un tel chemin n'existe pas.*

Algorithme de construction du squelette par zone d'influence

Notations

La zone d'influence de l'ensemble Z_i est notée $ZI(\text{domaine} = X, \text{centre} = Z_i)$ et sa frontière $FR(\text{domaine} = X, \text{centre} = Z_i)$.

Le *squelette par zone d'influence* (SZI) s'obtient aisément par l'algorithme suivant :

- dans un premier temps, on délimite les zones Z_i des régions de base ;
- pour les autres pixels, il suffit d'itérer la démarche suivante jusqu'à stabilisation du processus : si un pixel a un voisin indicé i , alors ce pixel prend le même indice ; les points qui n'ont pas de voisin ou ceux qui en ont deux sont laissés inchangés ;
- au terme de ce processus, les pixels sont attribués à l'une ou l'autre zone de départ Z_i .

Exemple

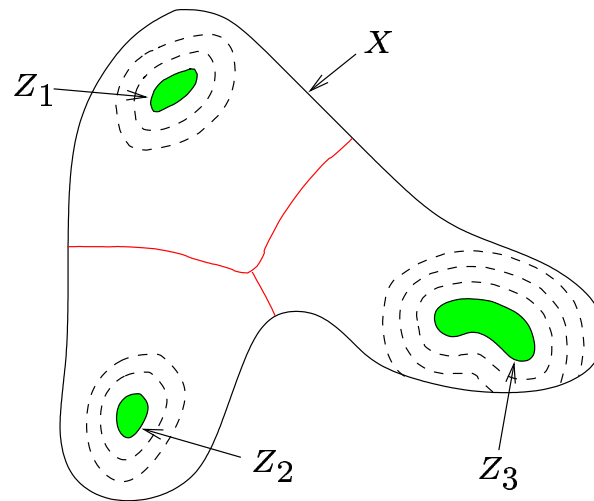


FIG. 43 – Squelette géodésique.

Images en niveaux de gris

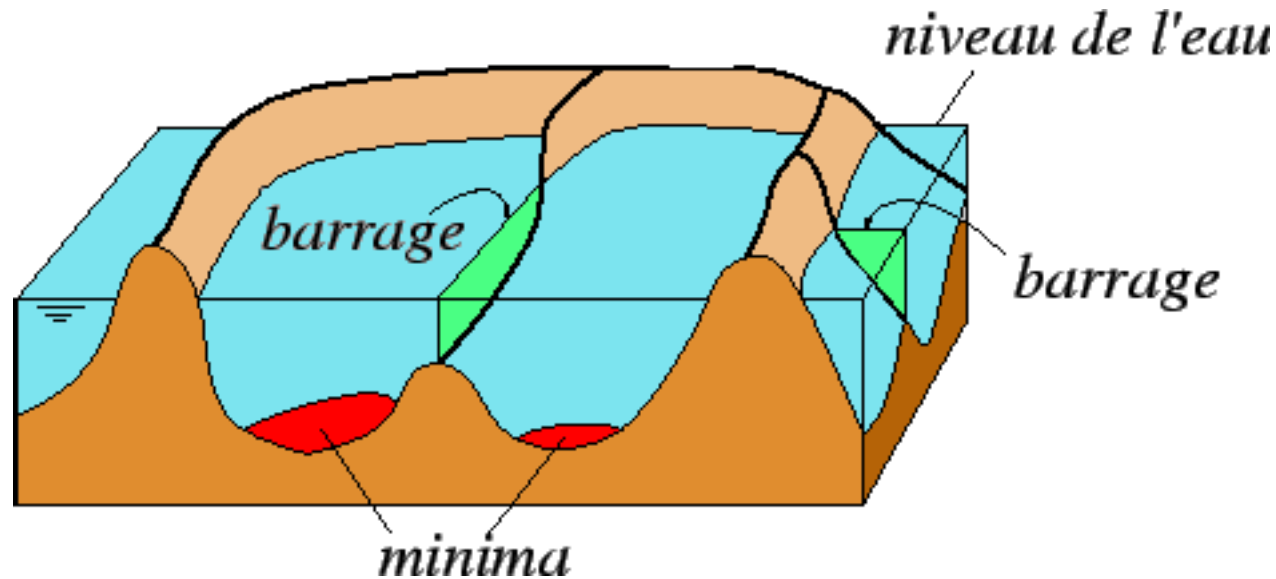


FIG. 44 – Construction d'un barrage au raccord de deux bassins versants.

Notations :

- f est la fonction étudiée.
- h_{min} et h_{max} sont les valeurs extrêmes de f sur son domaine de définition.
- $T_h(f) = \{x \in \text{dom } f : f(x) \leq h\}$ est l'ensemble constitué par un seuil h .
- M_i sont les minima et $\mathcal{C}(M_i)$ les bassins correspondants.

Construction par étape

Soit $\mathcal{C}_h(M_i)$ la partie du bassin M_i rempli au temps algorithmique h . Alors

$$\mathcal{C}_h(M_i) = \mathcal{C}(M_i) \cap T_h(f) \quad (54)$$

Dans cette expression, $\mathcal{C}(M_i)$ est l'inconnue.

Initialisation :

- $\mathcal{C}_{h_{min}}(M) = T_{h_{min}}(f)$; l'initialisation considère que tous les points minima sont des réservoirs potentiels.

Construction

$$\forall h \in [h_{min} + 1, h_{max}] : \mathcal{C}_h(M) = ZI_h \cup Min_h \quad (55)$$

avec

- ZI_h = zone d'influence (de domaine $T_h(f)$) composée des centres contenus dans $\mathcal{C}_{h-1}(M)$ –c'est durant cette étape que seront déterminés les barrages traduits en contours ;
- Min_h est l'ensemble des points de $T_h(f)$ qui, après le processus de recherche de zones d'influence n'ont toujours pas de voisin. Il s'agit de nouveaux minima, centres de nouvelles zones d'influence.

Marquage

Le *marquage* consiste à sélectionner certains minima seulement.

Les *avantages de la ligne de partage des eaux* par rapport à d'autres techniques de segmentation se résument en définitive à

- la possibilité de travailler sur base d'une image de gradient quelconque,
- la possibilité d'effectuer une pré-sélection par un marquage adéquat.

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire
- Rehaussement et restauration
- Segmentation d'images
- Tomographie par rayons X

Tomographie par rayons X